



Luboš Bauer, Hana Lipovská,
Miloslav Mikulík, Vít Mikulík

Matematika v ekonomii a ekonomice



- Moderní učebnice podle anglosaských univerzit
- Aplikace matematiky na ekonomické disciplíny
- Řešené příklady i samostatná cvičení s výsledky
- Případové studie z ekonomické praxe



Upozornění pro čtenáře a uživatele této knihy

*Všechna práva vyhrazena. Žádná část této tištěné či elektronické knihy nesmí být reprodukována a šířena v papírové, elektronické či jiné podobě bez předchozího písemného souhlasu nakladatele. Neoprávněné užití této knihy bude **trestně stíháno**.*

RNDr. Luboš Bauer, CSc.

Hana Lipovská

doc. RNDr. Miloslav Mikulík, CSc.

Ing. Vít Mikulík

Matematika v ekonomii a ekonomice

TIRÁŽ TIŠTĚNÉ PUBLIKACE:

Kniha je monografie

Vydala Grada Publishing, a.s.

U Průhonu 22, 170 00 Praha 7

tel.: +420 234 264 401, fax: +420 234 264 400

www.grada.cz

jako svou 5755. publikaci

Odborná recenze:

prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.

Vydání odborné knihy schválila Vědecká redakce nakladatelství Grada Publishing, a.s.

Odpovědný redaktor Petr Somogyi

Grafická úprava a sazba Mgr. David Hampel, Ph.D.

Počet stran 352

První vydání, Praha 2015

Vytiskly Tiskárny Havlíčkův Brod, a.s.

© Grada Publishing, a.s., 2015

Cover Photo © fotobanka allphoto

ISBN 978-80-247-4419-3

ELEKTRONICKÁ PUBLIKACE:

ISBN 978-80-247-9651-2 (ve formátu PDF)

Obsah

Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	13
O autorech	15
Úvodní slovo recenzenta	17
Předmluva	19
1 Připomenutí základních znalostí z matematiky	21
1.1 Množina	21
1.1.1 Množinové operace	23
1.1.2 Řešené příklady a aplikace	26
1.2 Výrokový počet	28
1.2.1 Kvantifikátory	30
1.2.2 Řešené příklady a aplikace	31
1.3 Poznámky k výstavbě matematiky	32
1.4 Úlohy k procvičení	34
2 Čísla	35
2.1 Zavedení reálných čísel	35
2.2 Množiny reálných čísel	39
2.2.1 Další vlastnosti reálných čísel	40
2.2.2 Zavedení racionálních operací s nevlastními čísly	41
2.2.3 Zavedení pojmu interval	41
2.2.4 Nerovnice v oboru reálných čísel	43
2.2.5 Zavedení absolutní hodnoty reálného čísla	43
2.2.6 Mocniny a odmocniny reálných čísel	45
2.3 Komplexní čísla	49
2.4 Připomenutí důležitých vzorců pro počítání s čísly	51
2.5 Řešené příklady a aplikace	53

3	Maticová algebra	63
3.1	Matice	63
3.2	Zvláštní typy matic	66
3.3	Základní operace s maticemi	68
3.4	Úlohy k procvičení	75
3.5	Soustavy lineárních rovnic	75
3.5.1	Soustava m lineárních rovnic o n neznámých	76
3.6	Eliminační metody řešení systému lineárních rovnic	81
3.7	Elementární úpravy matic	82
3.8	Ekvivalentní matice	83
3.9	Gaussova eliminační metoda	83
3.10	Jordanův algoritmus	84
3.11	Matice inverzní ke čtvercové matici	86
3.12	Determinanty	88
3.13	Výpočet determinantu rozvojem podle libovolného řádku nebo sloupce	92
3.13.1	Vztah mezi $ \mathbf{A} $ a $ \mathbf{A}^T $	93
3.14	Výpočet hodnoty determinantu z horní trojúhelníkové matice	95
3.15	Použití determinantů	95
3.16	Přímý výpočet inverzní matice pomocí determinantů	97
3.17	Řešené příklady a aplikace	98
3.18	Úlohy k procvičení	105
4	Číselné posloupnosti a číselné řady	107
4.1	Co je to posloupnost	107
4.2	Aritmetická a geometrická posloupnost	109
4.3	Limita posloupnosti	115
4.4	Vlastnosti posloupností reálných čísel	118
4.5	Nekonečné číselné řady	123
4.6	Aplikace posloupností	127
4.7	Řešené příklady a aplikace	136
4.8	Úlohy k procvičení	139
5	Zobrazení a funkce	141
5.1	Základní pojmy	141
5.2	Vlastnosti funkcí	145
5.3	Limita a spojitost funkce jedné proměnné	149
5.3.1	Úvodní poznámky k zavedení limity reálné funkce jedné proměnné	149
5.3.2	Definice limity funkce v daném bodě	150
5.3.3	Spojitosť funkce v bodě	154
5.3.4	Inverzní zobrazení	156
5.4	Elementární funkce	157
5.4.1	Polynom	157
5.4.2	Racionální lomená funkce	163
5.4.3	Funkce $\sqrt[n]{x}$	165

5.4.4	Exponenciální funkce a logaritmus	165
5.4.5	Trigonometrické a cyklometrické funkce	167
5.4.6	Složená funkce	173
5.5	Úlohy k procvičení	175
6	Diferenciální počet funkcí jedné proměnné	177
6.1	Zavedení pojmu derivace funkce	177
6.2	Derivace složených funkcí	184
6.3	Derivace vyšších řádů	187
6.4	Derivace funkce $f(x)^{g(x)}$	187
6.5	L'Hospitalovo pravidlo	188
6.6	Funkce spojité na intervalu	190
6.7	Věty o funkcích spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$	192
6.8	Funkce monotónní na intervalu a lokální extrémý	194
6.9	Globální extrémý	199
6.10	Konvexnost a konkávnost funkce	200
6.11	Průběh funkce	206
6.12	Diferenciál a Taylorova věta	212
6.13	Řešené příklady a aplikace	215
6.14	Úlohy k procvičení	225
7	Neurčitý integrál	231
7.1	Primitivní funkce	231
7.2	Metoda per partes (po částech)	236
7.3	Výpočet neurčitého integrálu substitucí	238
7.3.1	Racionální lomená funkce a její rozklad	244
7.3.2	Rozklad reálné ryze lomené racionální funkce na součet parciálních zlomků	245
7.3.3	Integrace racionální lomené funkce	248
7.3.4	Integrace některých významných tříd funkcí	255
7.4	Úlohy k procvičení	259
8	Určitý integrál	261
8.1	Zavedení Riemannova integrálu	262
8.2	Vlastnosti Riemannova integrálu	265
8.3	Existence Riemannova integrálu	266
8.4	Výpočet Riemannova integrálu	267
8.4.1	Metoda per partes a substituční metoda pro výpočet určitého integrálu	268
8.5	Nevlastní integrály	272
8.5.1	Integrál $\int_a^{\infty} f(x) dx$	272
8.5.2	Integrál $\int_{-\infty}^b f(x) dx$	274
8.5.3	Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	275
8.6	Nevlastní integrály vzhledem k funkci	275

8.7	Numerický výpočet určitého integrálu	277
8.7.1	Obdélníková metoda výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	278
8.7.2	Lichoběžníková metoda na výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	278
8.7.3	Simpsonova metoda výpočtu $\int_a^b f(x) dx$	279
8.8	Řešené příklady a aplikace	281
8.9	Úlohy k procvičení	289
9	Funkce více proměnných	294
9.1	Parciální derivace	301
9.2	Extrémy funkcí více proměnných	304
10	Vícerozměrné integrály	310
10.1	Substituční metoda pro výpočet dvojného integrálu	318
10.1.1	Substituční metoda pro dvojný integrál	318
11	Kombinatorika	324
11.1	Dvě kombinatorická pravidla	324
11.1.1	Pravidlo součinu	324
11.1.2	Pravidlo součtu	326
11.2	Permutace bez opakování	326
11.3	Variace bez opakování	330
11.4	Kombinace bez opakování	332
11.5	Variace s opakováním	336
11.6	Permutace s opakováním	337
11.7	Kombinace s opakováním	339
11.8	Úlohy k procvičení	340
	Literatura	342
	Glosář	345
	Použité zkratky	350
	Summary	352

Seznam obrázků

1.1	Znázornění množiny M	23
1.2	Znázornění množiny M a jejích prvků	24
1.3	Znázornění komplementu množiny A	24
1.4	Znázornění množiny $A - B$	24
1.5	Znázornění sjednocení $A \cup B$	25
1.6	Znázornění průniku $A \cap B$	25
1.7	Vennův diagram	27
1.8	Vennův diagram	28
2.1	Číselná osa	38
2.2	Intervaly	42
2.3	K poznámce 2	44
2.4	Komplexně sdružená čísla	50
2.5	Rozdělení komplexních čísel	52
3.1	Násobení matic	70
3.2	Výpočet determinantu matice 2. řádu	89
3.3	Výpočet matice S_1 (první část determinantu matice 3. řádu)	90
3.4	Výpočet matice S_2 (druhá část determinantu matice 3. řádu, kterou od první části odečteme)	91
3.5	Výpočet determinantu matice 3. řádu s přidáním prvních dvou řádků	91
4.1	Body reprezentující členy posloupnosti	108
4.2	Znázornění posloupnosti	108
4.3	Znázornění vkladů	110
4.4	Znázornění vkladů	112
4.5	Ilustrace řešení pomocí Excelu	114
4.6	Ilustrace řešení pomocí Excelu – inflace vyjádřená v procentech je 2,596 %	114
4.7	První členy posloupnosti $\{1/n\}$	115
4.8	Ilustrace k řešení příkladu pomocí Excelu	122
4.9	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	131
4.10	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	131
4.11	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	132
4.12	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	132
4.13	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	133

4.14	Ilustrace k řešení pomocí Excelu	133
5.1	Zobrazení F množiny A do B	142
5.2	Souřadnice bodu	144
5.3	Graf paraboly $y = x^2$	145
5.4	Graf závislosti podílu seniorů na populaci v jednotlivých letech	146
5.5	Graf závislosti počtu prodaných koloběžek v jednotlivých dnech	147
5.6	Graf funkce $y = \frac{1}{x}$	150
5.7	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \alpha$	151
5.8	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$	152
5.9	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha$	152
5.10	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$	153
5.11	Znaménko funkce $f(x) = x^2 - 5x + 6$	156
5.12	Zobrazení f množiny A do B a zobrazení f^{-1} množiny B do A	157
5.13	Zobrazení f množiny A do B a zobrazení k němu inverzní	157
5.14	Graf lineární funkce	160
5.15	Kořeny polynomu 2. stupně	163
5.16	Vlevo graf funkce $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$, vpravo graf funkce $y = x^3$ a $y = \sqrt[3]{x}$ pro $x \geq 0$	165
5.17	Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $a > 1$	166
5.18	Graf funkce a^x a $\log_a x$ pro $0 < a < 1$	167
5.19	Úhel v obloukové míře	168
5.20	Vztah mezi velikostí úhlu ve stupních a v obloukové míře	168
5.21	Zavedení funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{ctg} x$	170
5.22	Graf funkce $\sin x$	170
5.23	Graf funkce $\cos x$	171
5.24	Graf funkce $\operatorname{tg} x$	172
5.25	Graf funkce $\operatorname{ctg} x$	172
5.26	Graf funkce $\arcsin x$	173
5.27	Graf funkce $\arccos x$	173
5.28	Složené zobrazení	174
6.1	Tečna ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $T[a, f(a)]$	178
6.2	Funkce s lokálním maximem v bodech a a b a lokálním minimem v bodě c	191
6.3	Absolutní extrém na $\langle a, b \rangle$	191
6.4	Porušení předpokladů věty 6.6.1	192
6.5	Derivace – směrnice tečny ($f'(a) > 0$)	192
6.6	Derivace jako směrnice tečny ($f'(a) < 0$)	193
6.7	Interpretace věty 6.7.1	193
6.8	Monotónnost funkce $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 5$	195
6.9	$f(x)$ má v x_0 derivaci	195
6.10	$f(x)$ nemá v x_0 derivaci	196
6.11	Tvar plechu na krabici	200
6.12	Zavedení funkce $\Phi(x)$ v bodě a	201
6.13	Funkce $f(x)$ má v bodě $T[a, f(a)]$ inflexní bod	201
6.14	Funkce ryze konvexní na intervalu I	203

6.15	Funkce ryze konkávní na intervalu I	204
6.16	Funkce konvexní na intervalu I	204
6.17	Funkce konkávní na intervalu I	205
6.18	Konkávnost, konvexnost a inflexní bod funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + x$	205
6.19	Konvexnost funkce $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 12x + 1$	206
6.20	Konkávnost, konvexnost a inflexní bod funkce $f(x) = \frac{1}{x} \ln x$	206
6.21	Asymptoty bez směrnice $-x = \frac{1}{2}$	207
6.22	Asymptota se směrnicí v bodě ∞	207
6.23	Náčrtek grafu funkce $\frac{2x+1}{x(x+1)}$	211
6.24	Prodej zboží	211
6.25	Význam diferenciálu	212
6.26	Lineární poptávková funkce, $P = aQ + b$	215
6.27	Dokonale neelastická poptávka	216
6.28	Dokonale elastická poptávka	216
6.29	Lokální minimum funkce TC v bodě $Q = 420$	219
8.1	Význam $s(f, D_5)$	262
8.2	Význam $S(f, D_5)$	263
8.3	Význam $\int_a^b f(x) dx$, $f(x) \geq 0$, $x \in \langle a, b \rangle$	265
8.4	Funkce po částech spojitá	266
8.5	Definice nevlastního integrálu $\int_a^\infty f(x) dx$	273
8.6	Aproximace $f(x)$ polynomem $P_3^i(x)$	280
8.7	Graf rozložení bohatství v populaci	286
8.8	Výpočet Giniho koeficientu	286
9.1	Průměty bodů	295
9.2	Vrstevnice funkce $z = x^2 + y^2$ o úrovních 1 a 4	295
9.3	Vzdálenost bodů v \mathbb{R}^2 a Pythagorova věta	296
9.4	Okolí $U_\delta(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : \varrho(A, X) \leq \delta\}$	296
9.5	Množina M	297
9.6	Hromadný bod Y	297
9.7	Limita funkce v bodě A	300
9.8	Nevlastní limita v bodě A	301
9.9	Geometrický význam parciálních derivací	302
9.10	Extrémy funkcí více proměnných	304
9.11	Uzavřená oblast	308
10.1	Dílek $D_{i,j}$ obdélníku D	310
10.2	Kvádr s podstavou $D_{i,j}$ a výškou $h_{i,j}$	311
10.3	Součet objemů kvádrů	311
10.4	Uzavřená oblast ω	312
10.5	Normální uzavřená oblast vzhledem k ose x	313
10.6	Normální uzavřená oblast vzhledem k ose y	314
10.7	Oblast D	314

10.8	Oblast D	315
10.9	Oblast D	316
10.10	Obdélníkový průřez	317
10.11	Oblast D	317
10.12	Regulární oblast $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	318
10.13	Polární souřadnice	319
10.14	Ilustrace k příkladu 288: vlevo oblast A , napravo oblast B	320
10.15	Oblast A	321
10.16	Oblast A_t (vlevo) a oblast B_t (vpravo)	322
10.17	Oblast A	322
10.18	Oblast A_n	323
11.1	Schéma rozhodování při objednávce	325
11.2	Do libovolné buňky napíšeme vzorec permutace(n;r)	328
11.3	Výsledek je uveden ve formě vědeckého zápisu	328
11.4	Úprava formátu	328
11.5	Výsledek permutace	329
11.6	Schéma zasedacího pořádku	330

Seznam tabulek

1.1	Tabulka pravdivostních hodnot	29
3.1	Ukazatele z Výběrového šetření pracovních sil (2011)	63
3.2	Inflace [%]	68
3.3	Nezaměstnanost [%]	68
5.1	Vztah mezi velikostmi úhlů ve stupních a v radiánech	168
6.1	Derivace elementárních funkcí	181
7.1	Tabulka význačných neurčitých integrálů	234
8.1	Rozložení bohatství mezi dětmi	285
11.1	Výpis všech uspořádaných trojic	332
11.2	Uspořádané trojice bez opakování	333
11.3	Výpis všech uspořádaných čtveřic	337
11.4	Výběr permutací s opakováním	337
11.5	Schematické znázornění všech uspořádání 6 ks pralinek dvou druhů	339

O autorech

RNDr. Luboš Bauer, CSc.

Absolvoval Přírodovědeckou fakultu Masarykovy univerzity, kde v roce 1989 získal titul kandidáta věd v oboru algebra a teorie čísel (práce Asociativní schemata, koherentní konfigurace a buňkové algebry). V letech 1978–1982 působil jako odborný pracovník Výzkumného ústavu elektrických strojů točivých, v letech 1986–1991 v Ústavu výpočetní techniky MU. Od této doby se zabývá také otázkami využití e-learningu ve výuce matematiky. Po roce 1991 spoluzakládal Katedru aplikované matematiky a informatiky Ekonomicko-správní fakulty MU, jejímž je od roku 2008 vedoucím. Je aktivně činný v akademické obci i jako člen Akademického senátu MU.

Hana Lipovská

Studuje obor Hospodářská politika na Ekonomicko-správní fakultě Masarykovy univerzity v Brně, kde také působila v letech 2011–2012 jako externí pracovnice Katedry aplikované matematiky a informatiky. Její práce Teorie her v ekonomii (2010) získala několik ocenění ve studentských soutěžích (např. cena Merkur soutěže Česká hlavička), na jejichž základě čerpala grant PPNS JCOMM. Ve své činnosti se zaměřuje na problematiku lidského kapitálu, ekonomie růstu a metodologie vědy. Externě spolupracuje s Českým statistickým úřadem a MŠMT ČR. Je řádnou členkou České společnosti ekonomické, Jednoty českých matematiků a fyziků a The American Economic Association.

doc. RNDr. Miloslav Mikulík, CSc.

Vystudoval Přírodovědeckou fakultu MU v Brně. Později získal titul kandidáta věd a habilitoval se. Jeho první práce patřily do oblasti algebry. Pracoval ve výzkumném ústavu, kde se zabýval řešením technických aplikací matematiky a zaváděním výpočetní techniky do praxe. Výzkumnou a publikační činností v oblasti numerických metod (splajny) rozvíjel na pozici samostatného vědeckého pracovníka během působení v Akademii věd. Tři roky působil jako assistant professor na univerzitě v Kuvajtu. V roce 1991 se podílel na institucionalizaci Katedry aplikované matematiky a informatiky nově vznikající Ekonomicko-správní fakulty MU, kde od té doby nepřetržitě pedagogicky působí.

Ing. Vít Mikulík

Je absolventem Fakulty stavební Vysokého učení technického v Brně, oboru Konstrukce a dopravní stavby. Matematice se věnoval již jako student v matematické třídě i jako účastník olympiád. Svou odbornou pracovní a vědecko-výzkumnou činnost zaměřil na matematické řešení problémů aplikované mechaniky. Na MU v Brně se zapojil do několika projektů. Jako vysokoškolský pedagog na VUT v Brně je tvůrcem e-learningových kurzů. Aktivně se účastní četných konferencí a seminářů.

Úvodní slovo recenzenta

Publikaci *Matematika v ekonomii a ekonomice* lze považovat za základní učební text matematiky pro studenty ekonomie.

Knih je vhodně uspořádána do jedenácti kapitol. Výklad začíná připomenutím základních matematických pojmů. Postupně jsou uvedena další témata až po násobné integrály. Poslední kapitola je věnována užitečnému nástroji v počtu pravděpodobnosti – kombinatorice.

Každá kapitola začíná motivačním příkladem, pro jehož řešení je pak vybudována matematická teorie. Výklad sice nezahrnuje precizní matematické důkazy, ale ukazuje užití získaných matematických dovedností k řešení praktických úloh. Zejména lze ocenit, že součástí každé kapitoly jsou aplikace, které se zabývají řešením konkrétních ekonomických problémů. Navíc je u každé kapitoly uvedeno shrnutí a úlohy k procvičení.

Knih poutavým způsobem ukazuje, jak lze matematické znalosti využívat a zejména jak se lze s jejich pomocí vypořádat s ekonomickou teorií a praxí.

Recenzovaná publikace je sice primárně určena pro studenty ekonomie, ale je vhodná i pro studenty jiných nematematických oborů.

prof. RNDr. Ivanka Horová, CSc.

Ústav matematiky a statistiky

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

