# Řešené příklady z matematiky

# Lineární algebra

**Jaroslava Justová**

e-kniha

MATIK

Řešené příklady z matematiky

# LINEÁRNÍ ALGEBRA

RNDr. Jaroslava Justová

Matik Liberec

**E-knihu vydal:**
**Matik Liberec**
**Vydání první, 2015**

**ISBN 978-80-87711-06-4**

# Úvodem

Tato učebnice je věnována důležité oblasti matematiky, lineární algebře. Je určena především vysokoškolským studentům prvních ročníků nematematických oborů, ale může být vhodnou pomůckou i pro studenty přírodovědných gymnázií a další zájemce o matematiku. Je zaměřena na srozumitelné vysvětlení postupů při řešení různých typů úloh a je vhodná nejen pro studenty denního, ale i kombinovaného studia.

Probírané učivo je rozděleno do devíti kapitol. V každé naleznete nejprve stručný přehled základních poznatků z teorie, následovaný řešenými příklady s podrobným komentářem a vysvětlením postupu výpočtu. Metodické zpracování odpovídá tomu, že lineární algebra je často náplní již 1. semestru, proto se zde nevyskytují úlohy, které by vyžadovaly větší znalosti z matematické analýzy. Zájemce o podrobnější výklad teorie s důkazy vět a náročnější příklady bych odkázala např. na literaturu [1], [2]. Mou snahou bylo zahrnout do učebnice všechna základní témata lineární algebry probíraná na nematematických oborech vysokých škol a poskytnout studentům rozsáhlý soubor řešených úloh vhodných pro přípravu na semináře a písemné testy.

Text vznikl na základě mých dlouholetých zkušeností s vyučováním matematiky na Technické univerzitě v Liberci, na Fakultě přírodovědně-humanitní a pedagogické. Praktická forma e-knihy umožňuje mít ji stále při ruce – ve čtečce, na počítači, v tabletu či v mobilu.

Věřím, že tato učebnice přispěje k lepšímu porozumění probírané látky a ke snazšímu zvládnutí Vašeho studia.

autorka

P.S. Vřele doporučuji si uvedené příklady nejen přečíst, ale také si je vypočítat, s průběžnou či závěrečnou kontrolou výsledku i postupu řešení.

# Obsah

# 1. Aritmetické vektory

**Definice 1.1.** *Aritmetickým n-rozměrným vektorem nazveme uspořádanou n-tici reálných čísel.*

Vektory značíme: $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $u_i \in R \; \forall\, i = 1, ..., n$,
$o = (0, 0, ..., 0)$ ... nulový vektor.

## *Základní operace s aritmetickými vektory*

Mějme vektory $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ a číslo $c \in R$. Zavedeme:

- Součet vektorů $u$ a $v$: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.
- Reálný násobek vektoru $u$ číslem $c$: $cu = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$.

**Definice 1.2.** *Mějme n-rozměrné aritmetické vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Lineární kombinací těchto vektorů nazveme vektor $z$, pro který platí:*

$$z = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k = \sum_{i=1}^{k} c_iu_i, \quad c_i \in R.$$

Reálná čísla $c_i$ z definice se nazývají *koeficienty lineární kombinace*. Jsou-li všechny koeficienty nulové, pak se lineární kombinace nazývá *triviální* a jejím výsledkem je nulový vektor.

## *Lineární závislost a nezávislost vektorů*

Lineární závislost a nezávislost je důležitou vlastností skupiny vektorů.

**Definice 1.3.** *Aritmetické vektory $u_1, u_2, ..., u_k$ se nazývají lineárně závislé, jestliže existují čísla $c_1, c_2, ..., c_k \in R$, z nichž aspoň jedno je nenulové, a přitom*

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k = o.$$

*V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislé.*

**Věta 1.1.** *Vektory jsou lineárně závislé, právě když lze aspoň jeden z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních.*

Z této věty plyne, že lineárně závislé jsou skupiny vektorů, kde jeden je násobkem jiného, jeden je součtem jiných, kde je obsažen nulový vektor apod. Z následující věty vyplývá, že závislé jsou vektory také tehdy, když je jejich počet větší, než kolik mají složek.

**Věta 1.2.** *Je-li $k$ $n$-rozměrných vektorů a $k > n$, pak jsou vektory lineárně závislé.*

Obecně se lineární (ne)závislost zjišťuje:
a) řešením rovnice z definice – rovnice pro vektory se rozepíše podle jednotlivých složek a ze vzniklé soustavy rovnic se vypočítají čísla $c_i$. Pak platí, že vektory $u_1, u_2, ..., u_k$ jsou

- lineárně závislé, jestliže $\exists c_i \neq 0$, že $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0$,
- lineárně nezávislé, jestliže $\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0 \;\Rightarrow c_i = 0 \;\forall i = 1, ..., k$.

b) výhodněji pomocí hodnosti matice (viz kapitola *Matice*).

Přidáme-li do skupiny lineárně závislých vektorů další vektor, bude nová skupina lineárně závislá. Odebereme-li ze skupiny lineárně nezávislých vektorů některý vektor, zůstane skupina lineárně nezávislá.

*Poznámka*

Dvojrozměrné vektory můžeme graficky znázornit v rovině orientovanou úsečkou z bodu $[0, 0]$. Dva lineárně závislé vektory jsou rovnoběžné, dva lineárně nezávislé vektory různoběžné. Analogicky lze znázornit trojrozměrné vektory v prostoru.

## *Skalární součin a norma aritmetických vektorů*

Pro aritmetické vektory $u = (u_1, u_2, ..., u_n), v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ zavádíme kromě základních operací sčítání a násobení reálným číslem i další operaci, a to *skalární součin vektorů* $u$ *a* $v$ s označením $uv$:

$$uv = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n = \sum_{i=1}^{n} u_iv_i.$$

Dva aritmetické vektory $u, v$ se nazývají *ortogonální*, jestliže $uv = 0$. Navzájem ortogonální nenulové vektory jsou lineárně nezávislé.

Vlastnosti skalárního součinu ($u, v, z$ jsou aritmetické vektory):

- $uu \geq 0 \;\wedge\; (uu = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $uv = vu$,
- $(u + v)z = uz + vz$,
- $c(uv) = (cu)v, \;\; c \in R$.

Pomocí skalárního součinu zavedeme i další důležitý pojem, a to *norma vektoru* $u$, kterou značíme $||u||$:

$$||u|| = \sqrt{uu}.$$

Vlastnosti normy ($u, v$ jsou aritmetické vektory):

- $||uu|| \geq 0 \;\wedge\; (||u|| = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
- $||cu|| = |c| \, ||u||, \;\; c \in R$,
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (tzv. trojúhelníková nerovnost).

Takto zavedená norma se nazývá eukleidovská. Normu aritmetického vektoru lze zavést i jinými způsoby (viz Příklad 1.16).

*Poznámky*

1) Při grafickém znázornění dvojrozměrných a trojrozměrných vektorů vyjadřuje norma vektoru jejich délku. Nenulové ortogonální vektory jsou na sebe kolmé.
2) Pro odchylku $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ dvou nenulových vektorů platí vztah:

$$\cos\varphi = \frac{uv}{||u||\,||v||}.$$

3) Je-li $||u|| = 1$, vektor $u$ se nazývá *normovaný*. Z libovolného vektoru $u$ můžeme vytvořit normovaný vektor tak, že ho vydělíme jeho normou (tj. $u_0 = \frac{u}{||u||}$).

## *Řešené příklady*

### Příklad 1.1.

Jsou dány vektory $u_1 = (2, -3, 0)$, $u_2 = (2, 1, 6)$, $u_3 = (-1, 1, -1)$. Utvořte jejich lineární kombinace:
a) $t = 7u_2$,
b) $v = 4u_1 + 5u_3$,
c) $w = 2u_1 - 2u_2 + u_3$.

*Postup:* Výpočet provedeme po složkách:

a) $t = 7(2, 1, 6) = (14, 7, 42)$,
b) $v = 4(2, -3, 0) + 5(-1, 1, -1) = (3, -7, -5)$,
c) $w = 2(2, -3, 0) - 2(2, 1, 6) + (-1, 1, -1) = (-1, -7, -13)$.

### Příklad 1.2.

Jsou dány vektory $t = (2, 4, -5), u = (3, 1, -2), v = (3, 6, -1, 1)$. Z následujících zápisů vyberte ty, které označují nějakou lineární kombinaci těchto vektorů:

$2t$, $3t - 8u$, $2u + 4$, $-3v$, $tu$, $2u + 6v$, $(0, 0, 0)$.

*Postup:* Lineární kombinace vektorů představují zápisy:

$2t$, $3t - 8u$, $-3v$, $(0, 0, 0)$.

Lineárními kombinacemi nejsou:

$2u + 4$ ... nelze k vektoru přičítat číslo,
$tu$ ... lineární kombinací není skalární součin vektorů,
$2u + 6v$ ... nelze sčítat vektory s různým počtem složek.

**Příklad 1.3.**

Zjistěte, zda vektor $z = (1, 4, 0)$ je lineární kombinací vektorů $u, v$, kde $u = (-2, 1, 3)$ a $v = (1, -2, -2)$.

*Postup:* Podle definice lineární kombinace musíme zjistit, zda existují čísla $c_1, c_2$, aby:

$$z = c_1 u + c_2 v,$$

$$(1, 4, 0) = c_1(-2, 1, 3) + c_2(1, -2, -2).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= -2c_1 + c_2, \\ 4 &= c_1 - 2c_2, \\ 0 &= 3c_1 - 2c_2. \end{aligned}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme řešení $c_1 = -2, c_2 = -3$.
Vektor $z$ je lineární kombinací zadaných vektorů: $z = -2u - 3v$.

**Příklad 1.4.**

Podle definice zjistěte, zda vektory $(1, -1, 0, 2)$, $(2, 0, 2, 3)$, $(2, -4, 2, 1)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

*Postup:* Z vektorů sestavíme lineární kombinaci s koeficienty $c_1, c_2, c_3$ a řešíme rovnici:

$$c_1(1, -1, 0, 2) + c_2(2, 0, 2, 3) + c_3(2, -4, 2, 1) = (0, 0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ -c_1 \qquad - 4c_3 &= 0, \\ 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dosazovací nebo sčítací metodou získáme jediné řešení $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$, proto jsou vektory lineárně nezávislé.

**Příklad 1.5.**

Podle definice spočítejte, zda vektory $(-2, 1, 2)$, $(0, 1, 5)$, $(2, 0, 3)$ jsou lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

*Postup:* Pro lineární kombinaci vektorů s koeficienty $c_1, c_2, c_3$ budeme řešit rovnici:

$$c_1(-2, 1, 2) + c_2(0, 1, 5) + c_3(2, 0, 3) = (0, 0, 0).$$

Rozepsáním po složkách dostaneme soustavu:

$$\begin{array}{rrrl}
-2c_1 & & +2c_3 & = 0, \\
c_1 & +c_2 & & = 0, \\
2c_1 & +5c_2 & +3c_3 & = 0, \\
\hline
 & & c_3 & = c_1, \\
 & & c_2 & = -c_1, \\
2c_1 & -5c_1 & +3c_1 & = 0, \\
\hline
 & & 0 & = 0.
\end{array}$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení, tedy i řešení nenulové. Proto jsou zadané vektory lineárně závislé.

**Příklad 1.6.**

Zjistěte, pro které $a$ jsou vektory $(4, -1, 2)$, $(1, 2, -1)$, $(1, a, 5)$ lineárně závislé.

*Postup:* Sestavíme lineární kombinaci s koeficienty $c_1, c_2, c_3$ a hledáme nenulové řešení rovnice:

$$c_1(4, -1, 2) + c_2(1, 2, -1) + c_3(1, a, 5) = (0, 0, 0).$$

Dostaneme soustavu:

$$
\begin{array}{rrrl}
4c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0, \\
-c_1 & +2c_2 & +ac_3 & = 0, \\
2c_1 & -c_2 & +5c_3 & = 0, \\
\hline
 & & c_2 & = -4c_1 - c_3, \\
 & & c_1 & = -c_3 \;\Rightarrow\; c_2 = 3c_3, \\
c_3 & +6c_3 & +ac_3 & = 0, \\
\hline
 & c_3 & (a+7) & = 0.
\end{array}
$$

Z 1. a 3. rovnice jsme vyjádřili $c_2$ a $c_1$ a dosadili je do 2. rovnice. Poslední rovnice má dvě řešení:
a) $c_3 = 0$, pak ale i $c_1 = 0, c_2 = 0$ a vektory by byly lineárně nezávislé pro každé $a$,
b) $a = -7$ a pak může být $c_3$ libovolné nenulové číslo. Tedy pro hodnotu $a = -7$ jsou vektory lineárně závislé.

**Příklad 1.7.**

Mějme lineárně nezávislé vektory $u, v, w \in V_n$. Zjistěte, zda jsou vektory $(u - v)$, $(u + w)$, $(u + v - 2w)$ lineárně závislé, nebo lineárně nezávislé.

*Postup:* Sestavíme opět lineární kombinaci s koeficienty $c_1, c_2, c_3$ a řešíme rovnici:

$$c_1(u - v) + c_2(u + w) + c_3(u + v - 2w) = o,$$

$$(c_1 + c_2 + c_3)u + (c_3 - c_1)v + (c_2 - 2c_3)w = o.$$

Protože vektory $u, v, w \in V_n$ jsou lineárně nezávislé, musí platit:

$$
\begin{array}{rrrl}
c_1 & +c_2 & +c_3 & = 0, \\
-c_1 & & +c_3 & = 0, \\
 & c_2 & -2c_3 & = 0.
\end{array}
$$

Soustava má jediné řešení $c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 0$, proto jsou vektory $(u - v)$, $(u + w)$, $(u + v - 2w)$ také lineárně nezávislé.

*Poznámka*

Lineární závislost a nezávislost vektorů se výhodněji zjišťuje pomocí hodnosti matice (viz kapitola *Matice*).

**Příklad 1.8.**

Ověřte vlastnost skalárního součinu aritmetických vektorů $u, v$ a $z$:

$$(u+v)z = uz + vz.$$

*Postup:* Podle definice součtu vektorů a skalárního součinu vektorů rozepíšeme:

$$(u+v)z = (u_1+v_1, u_2+v_2, ..., u_n+v_n)(z_1, z_2, ..., z_n) =$$
$$(u_1+v_1)z_1 + (u_2+v_2)z_2 + ... + (u_n+v_n)z_n =$$
$$= u_1z_1 + v_1z_1 + u_2z_2 + v_2z_2 + ... + u_nz_n + v_nz_n =$$
$$= (u_1z_1 + u_2z_2 + ... + u_nz_n) + (v_1z_1 + v_2z_2 + ... + v_nz_n) = uz + vz.$$

Tím jsme vlastnost dokázali pro libovolné $n$-rozměrné vektory.

**Příklad 1.9.**

Jsou dány vektory $u = (3, 3, -3)$, $v = (1, 2, 3)$, $z = (-2, 4, -2)$. Najděte dvojice vektorů, které jsou navzájem ortogonální.

*Postup:* Spočítáme všechny jejich skalární součiny:

$$\begin{aligned} uv &= (3, 3, -3)(1, 2, 3) = 3 + 6 - 9 = 0, \\ uz &= (3, 3, -3)(-2, 4, -2) = -6 + 12 + 6 = 12, \\ vz &= (1, 2, 3)(-2, 4, -2) = -2 + 8 - 6 = 0. \end{aligned}$$

Navzájem ortogonální jsou dvojice vektorů $uv$ a $vz$.

**Příklad 1.10.**

Spočtěte, pro která $t \in R$ jsou vektory $u = (5, 4, t)$ a $v = (t, 1, t)$ ortogonální.

*Postup:* Pro ortogonální vektory platí, že jejich skalární součin musí být roven 0. Tedy:

$$(5, 4, t)(t, 1, t) = 5t + 4 + t^2$$

a řešíme kvadratickou rovnici:

$$t^2 + 5t + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (t+1)(t+4) = 0 \;\Rightarrow\; t = -1 \;\vee\; t = -4.$$

Dvojice ortogonálních vektorů jsou:
a) $u = (5, 4, -1), v = (-1, 1, -1)$,
b) $u = (5, 4, -4), v = (-4, 1, -4)$.

**Příklad 1.11.**

Ověřte vlastnost normy aritmetických vektorů pro $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$:

$$||c\,u|| = |c|\;||u||,\;\; c \in R.$$

*Postup:* Podle definice normy rozepíšeme:

$$||c\,u|| = \sqrt{(cu_1)^2 + (cu_2)^2 + ... + (cu_n)^2} = \sqrt{c^2(u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2)} =$$

$$= |c|\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2} = |c|\;||u||.$$

Tím jsme vlastnost dokázali pro libovolný vektor $u$.

**Příklad 1.12.**

Jsou dány vektory $v = (-3, 1, 2, -7, 1)$, $w = (4, 6, -4, 0, 8)$. Spočtěte jejich skalární součin a jejich normy.

*Postup:*
a) Skalární součin: $vw = \sum_{i=1}^{5} v_i w_i = -12 + 6 - 8 + 0 + 8 = -6$.
b) Normy: $||v|| = \sqrt{vv} = \sqrt{9 + 1 + 4 + 49 + 1} = \sqrt{64} = 8$,
$||w|| = \sqrt{ww} = \sqrt{16 + 36 + 16 + 0 + 64} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$,
nebo upravíme: $w = (4, 6, -4, 0, 8) = 2\,(2, 3, -2, 0, 4)$ a
$||w|| = ||2(2, 3, -2, 0, 4)|| = 2\sqrt{4 + 9 + 4 + 0 + 16} = 2\sqrt{33}$.

**Příklad 1.13.**

Najděte normovaný vektor $z$, který je násobkem vektoru $u = (2, 2, 1)$.

*Postup:* Hledáme vektor $z$, $z = ku = (2k, 2k, k)$, aby $||z|| = 1$:

$$||z|| = \sqrt{4k^2 + 4k^2 + k^2} = \sqrt{9k^2} = 3|k|$$

$$3|k| = 1 \;\Rightarrow\; k = \pm\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow z_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \; z_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Zadaná úloha má tedy dvě řešení.

**Příklad 1.14.**

Jsou dány vektory $u = (-2, 2, 0)$ a $v = (-1, 2, 1)$. Spočtěte jejich odchylku $\varphi$ a rozhodněte, zda jsou ortogonální.

*Postup:* Pro odchylku $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$ platí:

$$\cos\varphi = \frac{uv}{||u||\,||v||}\;,$$

$$\cos\varphi = \frac{2+4+0}{\sqrt{4+4+0}\,\sqrt{1+4+1}} = \frac{6}{\sqrt{8}\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \;\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Odchylka vektorů $u, v$ je $\varphi = \frac{\pi}{6}$, vektory ortogonální nejsou.

**Příklad 1.15.**

Ověřte, že pro dva ortogonální vektory $u, v \in V$ a eukleidovskou normou $||u||$ platí:

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$$

*Postup:* Pro ortogonální vektory je $uv = vu = 0$:

$$||u+v||^2 = (u+v)(u+v) = uu + uv + vu + vv = uu + vv = ||u||^2 + ||v||^2.$$

(V prostoru $V_2$ tento vztah vyjadřuje Pythagorovu větu.)

**Příklad 1.16.**

Pro $n$-rozměrné vektory lze zavést i jiné normy než normu eukleidovskou. Pro $u = (u_1, ..., u_n)$ se používá např. norma:

$$||u|| = \max|u_i|, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Ověřte pro ni základní vlastnosti normy:

a) $\forall u \in V_n \ \ (||uu|| \geq 0) \wedge (||u|| = 0 \Leftrightarrow u = o)$,

b) $\forall u \in V_n \ \forall c \in R \ \ ||cu|| = |c| \, ||u||$,

c) $\forall u, v \in V_n \ \ ||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

*Postup:* Pro všechny $u, v \in V_n, c \in R$ plyne z vlastností absolutní hodnoty:

a) $\max|u_i| \geq 0, \ \ \max|u_i| = 0 \Leftrightarrow u = (0, 0, ..., 0)$.

b) $||cu|| = \max|cu_i| = \max\{|cu_1|, ..., |cu_n|\} = |c| \max\{|u_1|, ..., |u_n|\} =$
$= |c| \, ||u||$.

c) $||u + v|| = \max|u_i + v_i| \leq \max|u_i| + \max|v_i| = ||u|| + ||v||$,

přičemž maxima jsme určovali vždy pro $i = 1, ..., n$. Základní vlastnosti uvedené normy jsou tedy splněny.

# 2. Vektorový prostor

**Definice 2.1.** *Neprázdná množina $V$ se nazývá vektorový (příp. lineární) prostor nad $R$, jestliže:*
*a)* $\forall u, v \in V$ *je* $(u + v) \in V$,
*b)* $\forall u \in V,\ \forall k \in R$ *je* $ku \in V$,
*c)* $\forall u, v, z \in V,\ \forall c, d \in R$ *platí*:
1) $u + v = v + u$,
2) $(u + v) + z = u + (v + z)$,
3) $\exists\, o \in V$, že $\forall u \in V\ \ u + o = u$,
4) $\forall u \in V\ \exists (-u) \in V$, že $u + (-u) = o$,
5) $1u = u$,
6) $c(du) = (cd)u$,
7) $c(u + v) = cu + cv$,
8) $(c + d)u = cu + du$.

*Prvky vektorového prostoru se obecně nazývají vektory.*

Vlastnosti a), b) znamenají, že množina $V$ je tzv. *uzavřená* vzhledem k operaci sčítání a je *uzavřená* vzhledem k operaci násobení reálným číslem. Vlastnosti 1), 2), 7), 8) představují komutativní, asociativní a distributivní zákony, vlastnosti 3) a 4) zaručují existenci nulového prvku ($o$) a existenci opačného prvku pro $\forall u \in V$.

Vektorovým prostorem mohou být různé typy množin s definovanými operacemi sčítání a násobení číslem – množina posloupností, množina reálných funkcí atd. (viz příklady) a je jím i jednoprvková množina $V = \{0\}$. Důležitý vektorový prostor tvoří také aritmetické $n$-rozměrné vektory se zavedenými operacemi sčítání a násobení reálným číslem.

Značení:

$V,\ L,\ (V, +, \cdot),\ (L, +, \cdot)$ – obecný vektorový prostor se zadanými operacemi,

$V_n$ – aritmetický vektorový prostor $n$-rozměrný (např. $V_2, V_3, \ldots$),

$V_\infty$ – prostor posloupností.

*Poznámka*

Vektorový prostor lze zavést i nad C (komplexní čísla), ale my se budeme zabývat jen vektorovým prostorem nad R. Ten dále stručně nazýváme jen *vektorový prostor.*

**Definice 2.2.** *Neprázdná podmnožina* $W$ *vektorového prostoru* $(V, +, \cdot)$ *se nazývá podprostorem* $V$, *jestliže* $\forall u, v \in W$ *a* $\forall k \in R$ *je* $u + v \in W$ *a* $ku \in W$.

Podprostor je tedy uzavřený vzhledem ke sčítání i k násobení reálným číslem, a protože v něm jsou splněny i ostatní podmínky z definice ($W \subset V$), je sám také vektorovým prostorem vzhledem k operacím definovaným na $V$.

**Definice 2.3.** *Mějme množinu vektorů* $M = \{u_1, u_2, ..., u_k\}$, $M \subset V$. *Lineárním obalem množiny* $M$ *nazveme množinu*

$$[M] = \{z,\ z = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i,\ c_i \in R,\ u_i \in M\}.$$

Lineární obal množiny vektorů je tedy množina všech lineárních kombinací těchto vektorů (tj. všechny součty a násobky). Značí se také $L(M), [u_1, u_2, ..., u_k]$.

**Věta 2.1.** *Je-li* $M \subset V$, *pak* $[M]$ *je podprostorem* $V$.

Jestliže pro nějakou množinu $M = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ platí, že $[M] = V$, pak říkáme, že $M$ je *množinou generátorů* prostoru $V$ ($M$ generuje $V$, vektory z $M$ jsou určující skupinou prostoru $V$).

**Věta 2.2.** (Steinitzova, o výměně) *Mějme vektorový prostor* $V$ *a jeho množinu generátorů* $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$. *Jsou-li vektory* $v_1, v_2, ..., v_k$

*lineárně nezávislé, pak je $k \leq n$ a při vhodném očíslování je množina $\{v_1, ..., v_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$ také množinou generátorů prostoru $V$.*

## *Báze a dimenze vektorového prostoru*

Vlastnost lineární závislosti či nezávislosti vektorů lze definovat v libovolném vektorovém prostoru analogicky k definici 1.3.

**Definice 2.4.** *Vektory $u_1, u_2, ..., u_k$, kde $u_i \in V$, se nazývají lineárně závislé, jestliže existují čísla $c_1, c_2, ..., c_k$, že*

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = 0 \ \wedge \ \exists c_i \neq 0.$$

*V opačném případě se vektory nazývají lineárně nezávislé.*

**Definice 2.5.** *Množina vektorů $M = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, $M \subset V$, se nazývá báze vektorového prostoru $V$, jestliže platí:*
*a) vektory $u_1, u_2, ..., u_n$ jsou navzájem lineárně nezávislé,*
*b) $[M] = V$.*

Bázi vektorového prostoru si můžeme představit jako „nejmenší“ množinu (lineárně nezávislých) vektorů, která tento prostor generuje. Ve $V_n$ je bází např. množina $M = \{(1, 0, ..., 0), (0, 1, 0, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 0, 1)\}$. Tato báze, obsahující jednotkové vektory, se nazývá báze *kanonická* (též *standardní*).

**Definice 2.6.** *Má-li báze $M$ konečný počet prvků, pak se počet prvků báze $M$ nazývá dimenze (hodnost) vektorového prostoru $V$ a prostor $V$ se nazývá konečněrozměrný.*

Značení: $\dim V$, $\mathrm{h}(V)$.
Je $\dim V_n = n$, tj. $\dim V_2 = 2$ atd. Pro „nejmenší“ vektorový prostor $V = \{o\}$ je $\dim V = 0$. Je-li $W$ podprostorem $V$, pak $\dim W \leq \dim V$.

**Věta 2.3.** *Mějme vektorový prostor $V$, dim $V = n$. Množina $M$ je bází prostoru $V$, právě když lze každý vektor $z \in V$ vyjádřit jednoznačným způsobem jako lineární kombinaci vektorů z báze.*

Koeficienty této lineární kombinace nazýváme *souřadnice vektoru $z$ vzhledem k bázi $M$.*

**Věta 2.4.** *Mějme vektorový prostor $V$, dim $V = n$. Pak platí:*
*a) Každá báze prostoru $V$ má právě $n$ prvků.*
*b) Každá skupina $n$ lineárně nezávislých vektorů z $V$ je bází prostoru $V$.*
*c) Každá skupina lineárně nezávislých vektorů z $V$ má nejvýše $n$ prvků.*
*d) Každou skupinu $k$ lineárně nezávislých vektorů z $V$, $k < n$, lze doplnit na bázi $V$.*

## Normovaný vektorový prostor

V obecném vektorovém prostoru můžeme opět zavést pojem skalární součin vektorů, a to pomocí zobrazení:

**Definice 2.7.** *Mějme vektorový prostor $V$. Zobrazení $V \times V \to R$, které dvojici vektorů $u, v \in V$ přiřadí číslo $uv$, nazveme skalární součin, jestliže platí:*
*a)* $\forall u \in V \quad (uu \geq 0) \wedge (uu = 0 \Leftrightarrow u = o)$,
*b)* $\forall u, v \in V \quad uv = vu$,
*c)* $\forall u, v \in V, \forall k \in R \quad k(uv) = (ku)v$,
*d)* $\forall u, v, z \in V \quad (u + v)z = uz + vz$.

Analogicky jako pro aritmetické vektory se v prostoru $V$ zavádí též ortogonalita vektorů a eukleidovská norma. Vektorový prostor se zavedenou normou se nazývá normovaný vektorový prostor.

Báze $M$ prostoru $V$, ve které jsou každé dva vektory navzájem ortogonální, se nazývá *ortogonální báze*. Ve $V_n$ je ortogonální bází např. báze kanonická.

## *Řešené příklady*

### Příklad 2.1.

Zjistěte a zdůvodněte, zda uvedené číselné množiny s operacemi sčítání čísel a násobení reálným číslem tvoří vektorový prostor:
a) množina přirozených čísel $N$,
b) množina celých čísel $Z$,
c) množina reálných čísel $R$.

*Postup:*
a) Množina $N$ je uzavřená vůči sčítání, ale není uzavřená vůči násobení reálným číslem (např. pro $n \in N$: $-2n \notin N$), také nemá nulový ani opačné prvky. Množina $N$ tedy vektorovým prostorem není.

b) Množina $Z$ je uzavřená vůči sčítání a má nulový i opačné prvky, ale opět není uzavřená vůči násobení reálným číslem (např. pro $5 \in Z$: $5 \cdot \frac{2}{3} \notin Z$). Množina $Z$ vektorovým prostorem není.

c) Množina $R$ je uzavřená vůči sčítání i vůči násobení reálným číslem, obsahuje nulový prvek 0, každé číslo má opačný prvek ($\forall a \in R$ je $-a \in R$) a reálná čísla splňují i všechny další podmínky z definice. Proto množina reálných čísel tvoří vektorový prostor. Lze zapsat: $R = V_1$.

### Příklad 2.2.

Zjistěte, zda uvedené množiny jsou podprostorem prostoru $V_2$:
a) $A = \{(1, a); a \in R\}$,
b) $B = \{(b, 0); b \in R\}$.

*Postup:*
a) Množina $A$ je neprázdnou podmnožinou $V_2$, ale není uzavřená ani vůči sčítání, ani vůči násobení reálným číslem:

– např.: $(1,3)+(1,4)=(2,7)$, $(\mathbf{2},7)\notin A$,
– např.: $5(1,3)=(5,15)$, $(\mathbf{5},15)\notin A$.

b) Množina $B$ je neprázdnou podmnožinou $V_2$. Ověříme pro ni, zda je uzavřená vůči sčítání i násobení reálným číslem:
– pro $b_1,b_2\in R:\ (b_1,0)+(b_2,0)=(b_1+b_2,\mathbf{0})\in B$,
– pro $k\in R, b_1\in R:\ k(b_1,0)=(kb_1,\mathbf{0})\in B$.
Množina $B$ je uzavřená vůči oběma operacím a je tedy podprostorem vektorového prostoru $V_2$.

## Příklad 2.3.

Rozhodněte, jestli je množina $S=\{(a,a,a,a);a\in R\}$ podprostorem prostoru $V_4$.

*Postup:* Množina $S$ obsahuje pouze vektory, které mají všechny složky stejné. Je neprázdná a je $S\subset V_4$. Stačí ověřit, že je uzavřená vůči sčítání a násobení reálným číslem:
– pro $a,b\in R:\ (a,a,a,a)+(b,b,b,b)=(a+b,a+b,a+b,a+b)\in S$,
– pro $k\in R, a\in R:\ k(a,a,a,a)=(ka,ka,ka,ka)\in S$.
Množina $S$ je uzavřená vůči oběma operacím, je tedy podprostorem vektorového prostoru $V_4$.

## Příklad 2.4.

Zjistěte a zdůvodněte, zda následující množiny funkcí s obvyklými funkčními operacemi jsou vektorovým prostorem:
a) $F_J$ – množina všech funkcí definovaných na intervalu $J$,
b) $K_J$ – množina všech funkcí kladných na intervalu $J$,
c) $C_J$ – množina všech funkcí spojitých na intervalu $J$.
Je některá podprostorem jiného prostoru?

*Postup:*
a) Množina $F_J$ vektorovým prostorem je, protože součet dvou funkcí i reálný násobek jsou opět funkce definované na $J$. Nulovým prvkem je konstantní nulová funkce a jsou splněny i ostatní podmínky

z definice vektorového prostoru. Např.: $\forall f, g \in F_J : f+g = g+f$, protože

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (f+g)(x).$$

b) Množina $K_J$ vektorovým prostorem není, protože není uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem, také neobsahuje nulový ani opačné prvky.

c) Množina spojitých funkcí $C_J$ vektorovým prostorem je: součet dvou spojitých funkcí i reálný násobek jsou opět funkce spojité na $J$, nulová funkce je spojitá (tj. nulový prvek do $C_J$ náleží) a jsou splněny i ostatní podmínky z definice vektorového prostoru.

Množina spojitých funkcí $C_J$ je podprostorem prostoru $F_J$.

## Příklad 2.5.

Zjistěte a zdůvodněte, zda následující množiny polynomů definovaných na $R$ s obvyklými funkčními operacemi jsou vektorovým prostorem:
a) $P$ – množina všech polynomů,
b) $P_n$ – množina všech polynomů nejvýše $n$-tého řádu, $n \in N, n$ pevné,
c) $Q_n$ – množina všech polynomů právě $n$-tého řádu, $n \in N, n$ pevné.
Je některá podprostorem jiného známého prostoru?

*Postup:*
a) Množina $P$ vektorovým prostorem je, protože součet dvou polynomů i reálný násobek jsou opět polynomy. Nulovým prvkem je nulová funkce (nulový polynom), opačnými prvky jsou polynomy s opačnými znaménky a jsou splněny i ostatní podmínky z definice vektorového prostoru.

b) Množina $P_n$ je vektorovým prostorem také, protože sčítáním a násobením reálným číslem se stupeň polynomu nezvýší. Podmínky z definice vektorového prostoru jsou splněny.

c) Množina $Q_n$ vektorovým prostorem není, neboť není uzavřená vzhledem ke sčítání – součet dvou polynomů může být nižšího řádu než $n$, např. $(x^n + 5) + (-x^n)$.