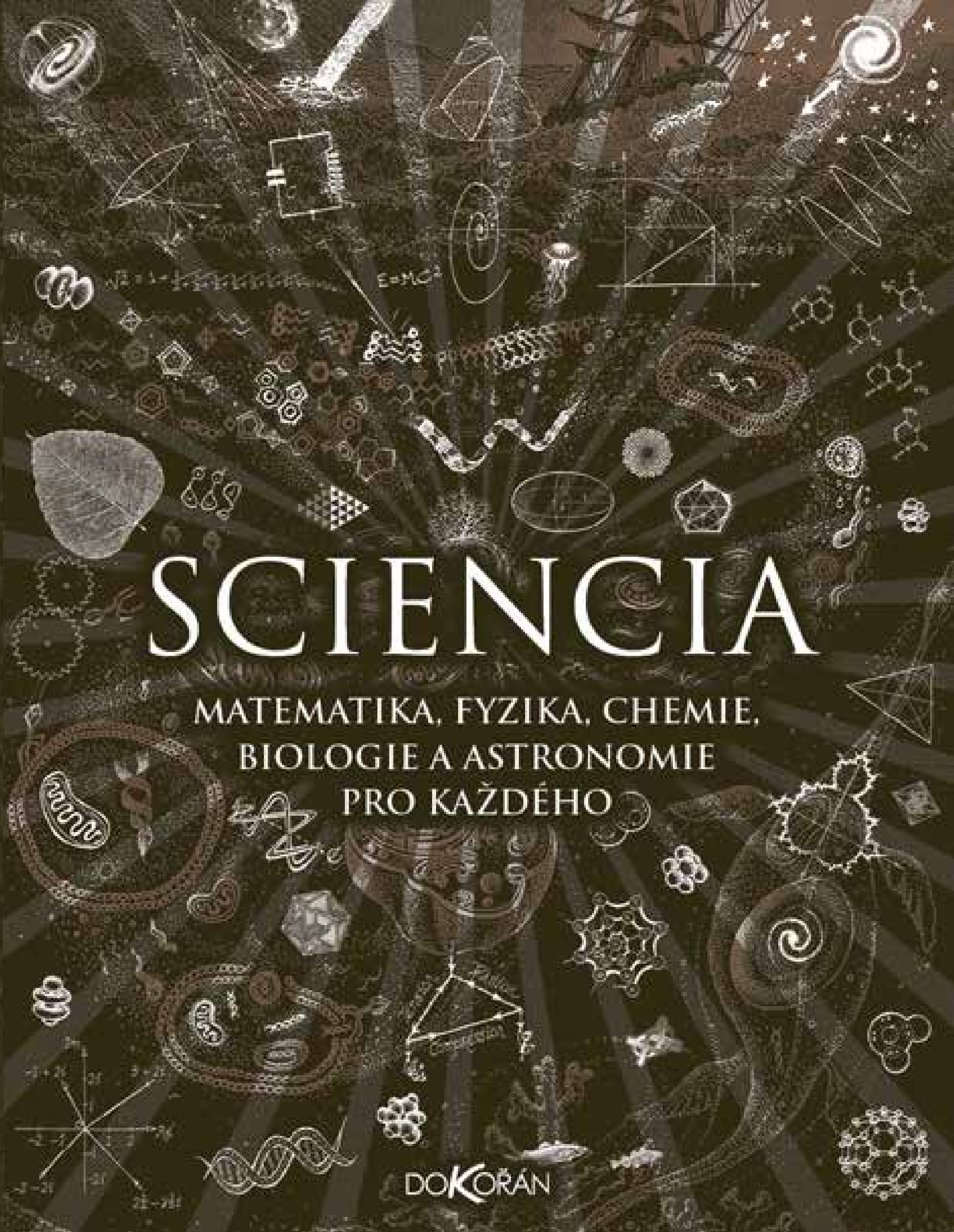


SCIENCIA

MATEMATIKA, FYZIKA, CHEMIE, BIOLOGIE A ASTRONOMIE PRO KAŽDÉHO

DOKOŘÁN

SCIENCIA

Design and typeset by Wooden Books Ltd., Glastonbury, Somerset, UK.

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Sazba Wooden Books Ltd., Michal Puhač.
Konverze do elektronické verze Michal Puhač.
Vydalo v roce 2018 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 988. publikaci (302. elektronická).

ISBN 978-80-7363-932-7

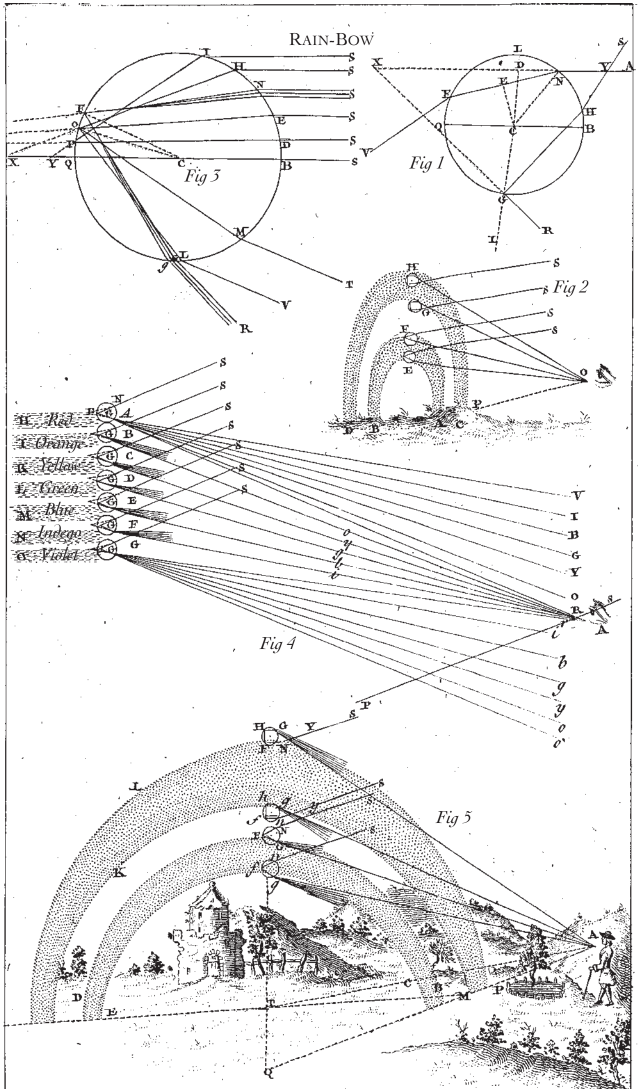
SCIENCIA

Matematika, fyzika, chemie, biologie a astronomie pro každého

„… to, co je dole, jest jako to, co jest nahoře, a to co jest nahoře, jest jako to, co jest dole, aby dokonány byly divy jediné věci.“

Smaragdová deska Herma Trismegista

Obsah



T. Jefferys sculp

Poznámka editora

Tento svazek shrnuje šestici populárně naučných titulů edice Pergamen, některé části jsou ale od základů přepracovány a více než 40 kapitol je zde zcela nových. Soubor shrnuje většinu poznatků z matematiky, fyziky, chemie, biologie a astronomie, které by měl znát každý začínající vědec i informovaný laik.

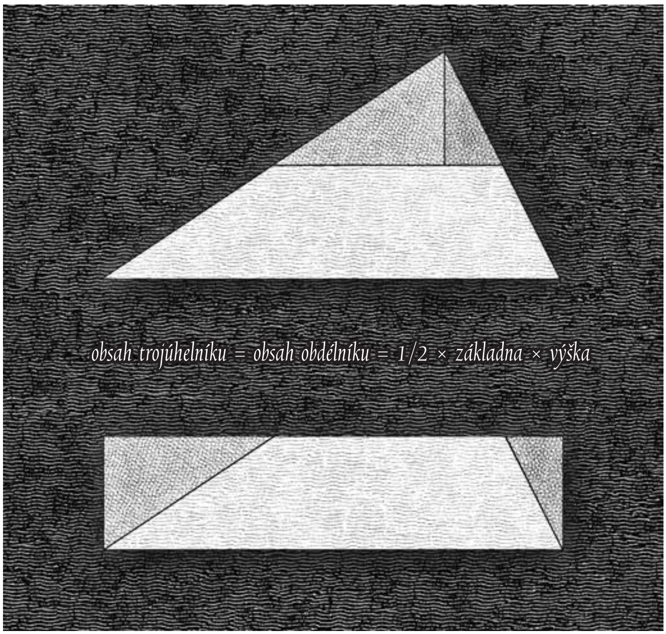
Náš sborník otevírá skvělá knížka Burkarda Polstera *Q. E. D. – Krása matematického důkazu*, která nám připomene, že některé věci nejsou zcela zřejmé. Následuje hutná sbírka *Nepostradatelné matematické a fyzikální vzorce* od Matthewa Watkinse, kde si může každý ověřit, co si ještě pamatuje ze školy. Třetím titulem jsou *Důležité prvky*, bouřlivě šumící průvodce Matta Tweeda po periodické tabulce, jímž přejdeme na chvíli k chemii. Dalším příspěvkem je *Evoluce* od Gerarda Cheshirea, vzrušující pojednání o pouti života na Zemi. V páté části – nádherné příručce *Lidské tělo* od Moffa Bettse – si naše znalosti biologie prohloubíme podrobným popisem jednoho z organismů. V šesté knize, jíž je *Kompaktní vesmír* Matta Tweeda, vzhlédneme k nebi a oddáme se úvahám o tom, jak neuvěřitelný je vesmír, který obýváme a jehož jsme součástí.

Poděkování za ilustrace pro *Sciencii* náleží: Cecily Kate Borthwickové, Allanu Brownovi, Dorionu Saganovi, Vivien Martineauové, Davidu Goodsellovi, Caroline Edeové, Joeovi Mclarenovi, Danu Goodfellowovi, Willu Springovi, Simonu Husonovi, NASA, laboratoři Fermilab a řadě rytců z minulých staletí. Na souboru se podíleli i další redaktoři a výtvarníci – Peter Spring, Daud Sutton, Polly Napperová, George Gibson, Mike O'Connor a Justin Avery.

Všem jmenovaným děkuji a čtenářům přeji radostný zážitek z četby.

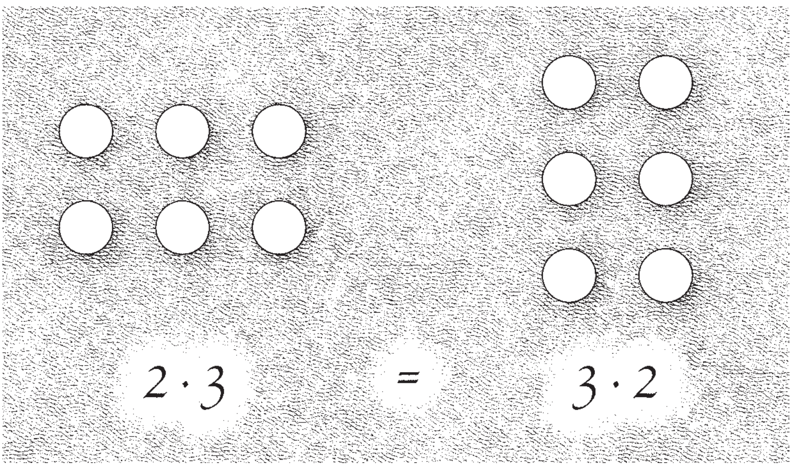
John Martineau

KNIHA I

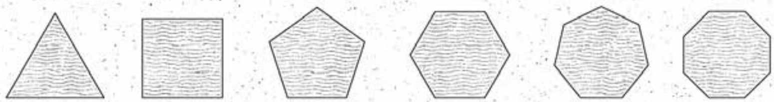

obsah trojúhelníku = obsah obdélníku = 1/2 × základna × výška

Q.E.D.

Krása matematického důkazu

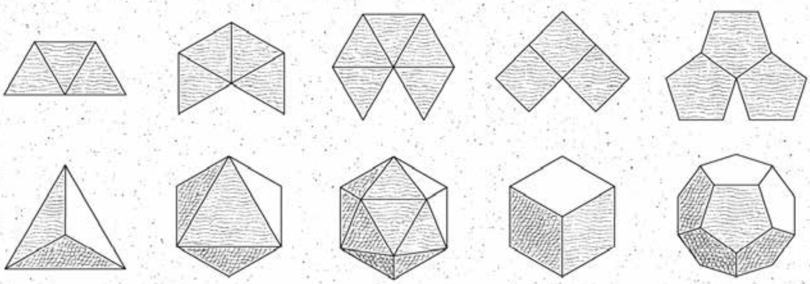


Burkard Polster



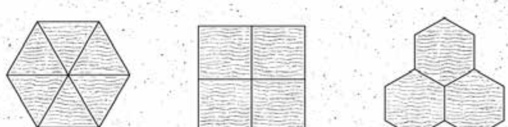
trojúhelník čtverec pětiúhelník šestiúhelník sedmiúhelník osmiúhelník

Pravidelný mnohoúhelník je konvexní dvojrozměrný útvar s identickými stranami a úhly. Existuje jich nekonečně mnoho.



čtyřstěn osmistěn dvanáctistěn krychle dvacetistěn

Pravidelný mnohostěn je konvexní trojrozměrné těleso, jehož všechny stěny jsou identické, mají tvar pravidelného mnohoúhelníku a u každého vrcholu se jich sejde stejný počet. Na obrázku nahoře vidíme různé způsoby, jak spojit tři nebo více pravidelných mnohoúhelníků v jednom bodě tak, aby nám ještě zbylo místo na jejich přehnutí do třetí dimenze. Dá se dokázat, že uvedené metody k sestrojení prostorových rohů jsou svého druhu unikátní, tedy jediné možné, a že vedou ke konstrukci proslulých pěti pravidelných těles.



Stejnou úvahou je možné ověřit, že existují jen tři možnosti, jak vydláždit beze zbytku celou rovinu pomocí stejných pravidelných mnohoúhelníků.

Úvod

Existuje několik matematických objektů, jejichž krásu je schopen vychutnat úplně každý. Jako příklad poslouží třeba pravidelné mnohoúhelníky nebo mnohostěny. Ty v dokonalosti předčí snad už jedině kruh nebo koule. A co taková Pythagorova věta, úhelný kámen pravoúhlého světa, kterým se záměrně obklopujeme? Nebo kuželosečky, které popisují dráhy nebeských těles?

Jen málo lidí ovšem ocení více než pár základních aspektů půvabu nádherného světa matematiky. Odhalení podstatné části této krásy je totiž obvykle dopřáno výhradně matematikům, a to ještě pouze při studiu či vymýšlení mistrně vysoustruhovaných důkazů, na které jen tak tak dosáhne pouze pár těch nejlépe trénovaných mozků světa.

Pokud chci já jakožto matematik veřejně prohlásit, že jsem ověřil pravdivost tvrzení nějaké věty, provedu to tak, že na konec jejího důkazu připíši tři písmena Q. E. D. To je zkratka latinského slovního obratu *quod erat demonstrandum* (do češtiny se dříve překládalo C. B. D. – „což bylo dokázati“, neboli „což mělo být dokázáno“). Takže Q. E. D. je na jedné straně milníkem pravdy a matematické krásy, na druhé straně ovšem zároveň reprezentuje zdánlivě nedosažitelnou stránku této pravěké vědy.

„Q. E. D.“ ale najdeme také na konci některých překvapivě úžasně jednoduchých a oku lahodících důkazů. Sbírkou několika takových zázračných klenotů, jakož i myšlenek v jejich pozadí Vás provede tato knížka, která byla napsána pro každého, koho zajímá krása matematiky ukrytá pod povrchem.

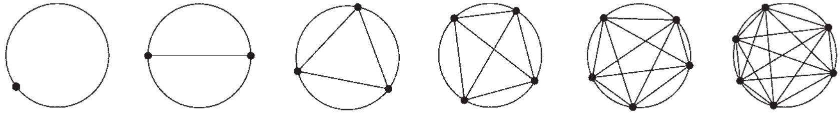
Proradná pravda

co je to vlastně důkaz

V matematice, podobně jako v přírodních vědách, můžeme udělat pokus nebo ověřit několik případů, a podle výsledku zformulovat určitou domněnku. V matematice však důkaz nelze nahradit žádným experimentem, ať už naše domněnka vypadá sebevíce přirozená a zjevná. Podívejme se třebas na to, na kolik oblastí lze nejvýše rozdělit kruh spojnicemi 1, 2, 3, 4, 5 a 6 bodů na jeho obvodu (*dole*). Překvapivě to je 1, 2, 4, 8, 16 a... 31, nikoli 32 (!), jak by se dalo čekat.

Nebo se podívejme třeba na proslulou Goldbachovu domněnku. Ta tvrdí, že každé sudé číslo větší než dvě je součtem dvou prvočísel, jako například 12 = 5 + 7 nebo 30 = 23 + 7. Tvrzení domněnky bylo sice ověřeno pro mnoho milionů případů, avšak dokud nebude nalezen důkaz, nemůžeme si nikdy být zcela jisti, že ji třeba hned ten příští případ, který někdo zkusí prověřit, nevyvrátí.

Důkaz matematického tvrzení by měl být co nejsrozumitelnější, co nejelegantnější, a hlavně co nejnázornější. Podívejme se (*naproti nahoře*) na důkaz tvrzení, že se číslo 0,9999... (jehož nekonečný desetinný rozvoj je složen ze samých devítek) rovná číslu 1. Ten uvedené požadavky nepochybně splňuje. Jeho hlavní myšlenku lze navíc velmi snadno upravit k přeměně mnoha čísel s obávanými periodickými rozvoji do podstatně příjemnějších tvarů. Důkaz tvrzení, že šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček není možné pokrýt dominovými kostkami (*naproti dole*), je dalším takovým příkladem. A i tento důkaz lze samozřejmě použít pro mnoho dalších typů zmrzačených šachovnic.



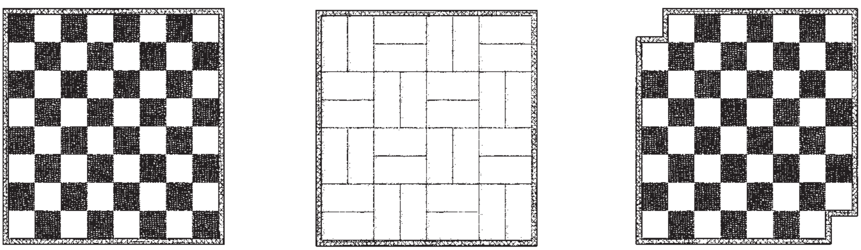
Věta: $1 = 0{,}999\ldots$

Důkaz: Nechť $x = 0{,}999\ldots$. Potom

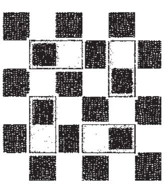
$$\begin{aligned} 10\,x &= 9{,}999\ldots \\ -\,x &= 0{,}999\ldots \\ =9\,x &= 9{,}000\ldots \end{aligned}$$

Tedy $x = 1{,}000\ldots$

Q. E. D.



Je snadné pokrýt obyčejnou šachovnici dominovými kostkami. Šachovnici zbavenou dvou protilehlých rohových políček jimi však pokrýt nelze.



Důkaz: *Při jakémkoli dláždění pokryje jedna dominová kostka vždy jedno černé a jedno bílé políčko. Pokaždé tedy pokryjeme stejný počet bílých a černých políček. Na naší upravené šachovnici je ale bílých políček o dvě méně než černých a proto ji dominovými kostkami nelze pokrýt.* Q. E. D.

Pythagorova věta

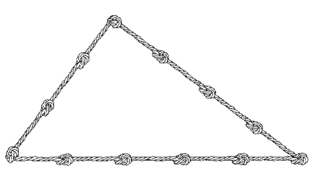
důkaz řezáním

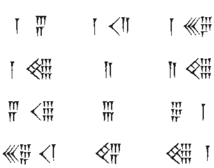
Slavná Pythagorova (asi 569–475 př. n. l.) věta praví, že v pravoúhlém trojúhelníku se čtverec nad nejdelší stranou (přeponou) rovná součtu čtverců nad odvěsnami (*naproti nahoře*). Dnes se to algebraicky zapisuje $a^2 + b^2 = c^2$.

Důkaz: Poskládáme čtyři stejné kopie daného pravoúhlého trojúhelníku se stranami a, b a c do velkého čtverce o straně $a + b$ tak, aby ve čtverci zůstala volná dvě čtvercová políčka o stranách a a b (*naproti, uprostřed vlevo*). Ve stejném čtverci lze tytéž čtyři trojúhelníky uspořádat tak, aby uprostřed velkého čtverce zůstal volný jeden čtverec o straně c (*naproti, uprostřed vpravo*). V obou případech se obsah nepokryté plochy rovná obsahu velkého čtverce minus čtyřnásobek obsahu daného trojúhelníku. Tudíž se součet obsahů dvou čtverců, tedy $a^2 + b^2$, rovná obsahu čtverce c^2. Q. E. D.

Platí i naopak (nutný je ovšem nový důkaz), že jestliže strany trojúhelníku splňují výše uvedený vztah, pak je tento trojúhelník pravoúhlý.

Přirozená čísla, která vyhovují rovnici $a^2 + b^2 = c^2$ se nazývají pythagorejskými trojicemi. Starověká konstrukce pravého úhlu pomocí smyčky vytvořené z provázku s 3 + 4 + 5 = 12 uzly stejně od sebe vzdálenými (*dole vlevo*), je založena na pythagorejské trojici 3 : 4 : 5. Babylonská hliněná tabulka (Plimpton 322), na níž nalezneme trojice čísel odpovídající pythagorejským trojicím (*dole vpravo*), naznačuje, že slavná věta byla možná známa dávno před Pythagorem.



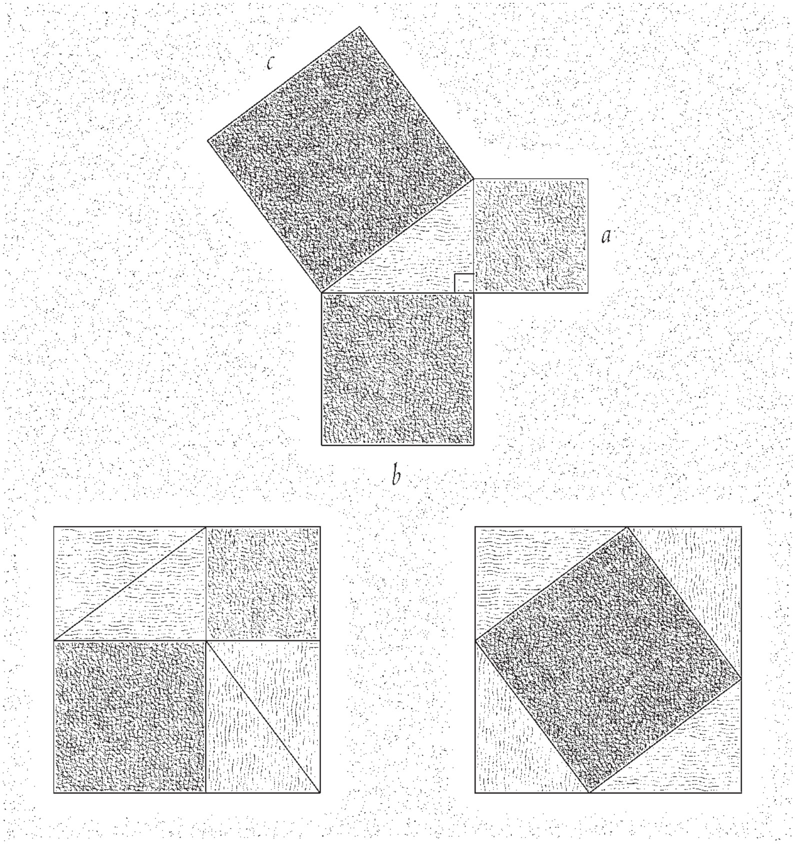


$65^2 + 72^2 = 97^2$

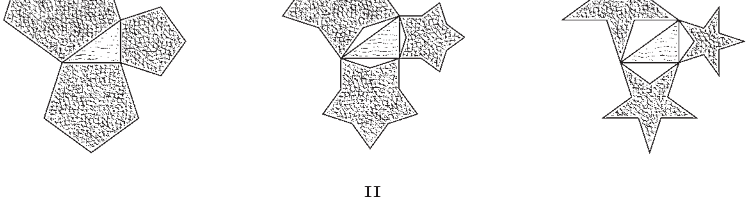
$119^2 + 120^2 = 169^2$

$319^2 + 360^2 = 481^2$

$2291^2 + 2700^2 = 3541^2$



Jestliže místo čtverců přiložíme ke stranám trojúhelníku jakékoli jiné tři vzájemně si podobné útvary, pak lze opět dokázat, že obsah největšího z nich bude roven součtu obsahů dvou menších.



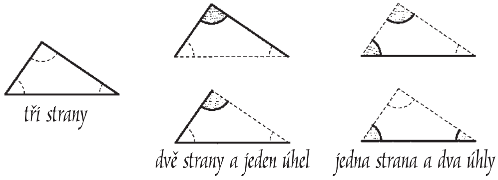
Jednoduše a na rovinu

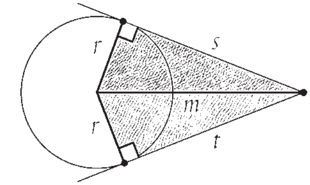
základní nástroje důkazů

Eukleidova (přibližně 325–265 př. n. l.) kniha *Základy* nastavila laťku matematické důslednosti již před velmi dávnou dobou. Protože jde o jednu z nejoblíbenějších učebnic všech dob, promítl se její obsah z velké části také do našeho kulturního dědictví.

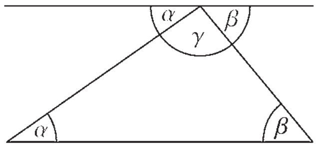
Ve třinácti dílech své knihy vybudoval Eukleides složitou síť vět, jejichž hloubka neustále narůstá. Tvrzení jsou propojena logickými argumenty a všechna jsou postupně odvozena z několika intuitivních faktů, zvaných *axiomy* či *postuláty*. V rámci přípravy na zbývající část této knihy vyjděte ze čtyř jednoduchých faktů uvedených vpravo a zkuste s jejich pomocí dokázat věty uvedené vlevo.

K tomu musíte být schopni na první pohled rozeznat dva různé typy „stejnosti“ dvou trojúhelníků. Dva trojúhelníky jsou *podobné*, jestliže mají stejné úhly. Vzhledem k tomu, že dvěma úhly v trojúhelníku je již určen třetí úhel, stačí k důkazu podobnosti dvou trojúhelníků ověřit, že mají alespoň dva úhly stejné. Dva trojúhelníky jsou *shodné*, jestliže mají stejně dlouhé strany. Tento případ nastává, pokud je alespoň jedna z pěti kombinací tří úhlů a tří stran naznačených na obrázku dole vlevo shodná u obou trojúhelníků. Například na diagramu dole vpravo jsou dva šedé trojúhelníky shodné, protože mají stejné dvě strany *r* a *m* a jeden pravý úhel, čímž je ověřena shodnost jedné z uvedených kombinací. Odtud dále plyne, že jsou také oba úseky *s* a *t* na tečnách ke kruhu shodné.



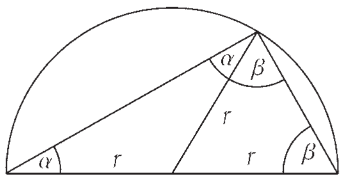


Součet úhlů v trojúhelníku.



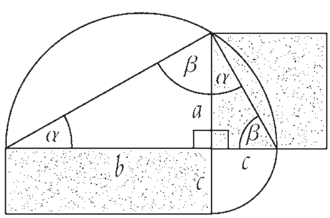
Součet úhlů $\alpha + \beta + \gamma = 180\,°$.

Thaletova věta:



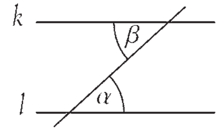
Horní úhel $\alpha + \beta = 90\,°$.

Kvadratura obdélníku:



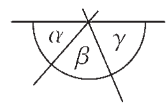
obsah čtverce = $a^2 = bc$ = obsah obdélníku
(z podobnosti trojúhelníků $a/c = b/a$).

Jsou-li přímky k a l rovnoběžné,



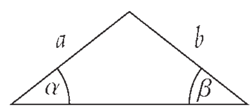
pak $\alpha = \beta$.

Jestliže



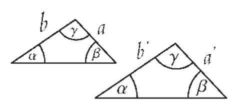
pak $\alpha + \beta + \gamma = 180\,°$.

Jestliže $a = b$,



pak $\alpha = \beta$, a naopak.

Pro podobné trojúhelníky



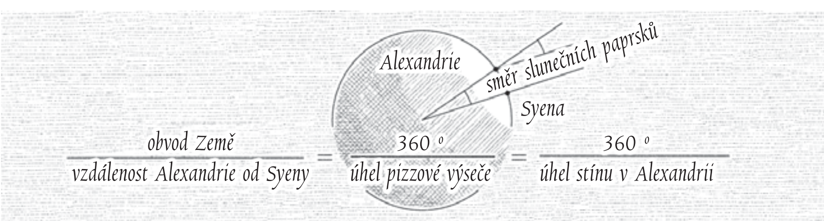
platí $a/a' = b/b'$.

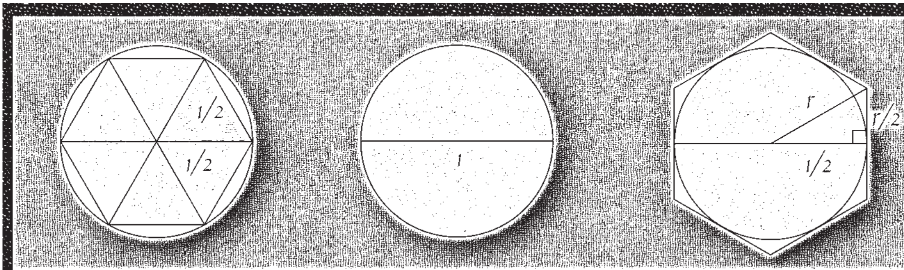
Najdete pí v pizze?

záhady kruhu

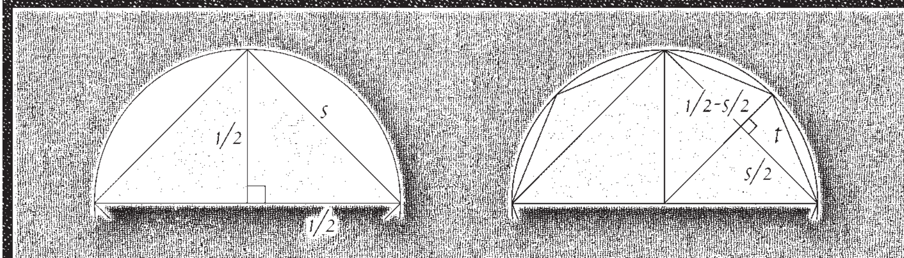
Eratosthenes z Kyreny (276–194 př. n. l.) se proslavil svou takzvanou koláčovou metodou výpočtu obvodu Země, založenou na vzdálenosti Alexandrie od Syeny (dnešní Asuán) a úhlu stínu v Alexandrii v okamžiku, kdy v Syeně Slunce svítilo až na dno hluboké studny. Pomocí vzorce *průměr kruhu* × π = *obvod kruhu* spočítal také průměr Země. Naštěstí jeho kolega Archimedes, s nímž si dopisoval, poskytl pro onu těžko polapitelnou hodnotu záhadného čísla π velmi rozumný odhad.

Vzhledem k tomu, že π je obvod kruhu s průměrem rovným jedné, je toto číslo nepochybně větší než obvod jakéhokoli pravidelného mnohoúhelníku vepsaného do kružnice a menší než obvod jakéhokoli mnohoúhelníku kružnici opsaného (*naproti nahoře*). Čím více stran onen mnohoúhelník bude mít, tím spíše se bude jeho obvod blížit obvodu kruhu. Naštěstí je snadné vypočítat z obvodu jednoho takového mnohoúhelníku obvod mnohoúhelníku o dvojnásobném počtu stran (*naproti uprostřed*). Archimedes vyšel z pravidelného šestiúhelníku a postupně spočítal obvody pravidelného dvanáctiúhelníku, čtyřiadvacetiúhelníku a dále mnohoúhelníků o 48 a 96 stranách, čímž odhadl hodnotu čísla pí mezi hodnotami 3 10/71 a 3 10/70. Posledně uvedená hodnota je rovna 22/7, což je odhad hodnoty π, který se používá v mnoha učebnicích dodnes. Použijeme-li místo šestiúhelníku jako výchozí mnohoúhelník čtverec (*naproti dole*), dostaneme vzorec pro aproximaci čísla π.



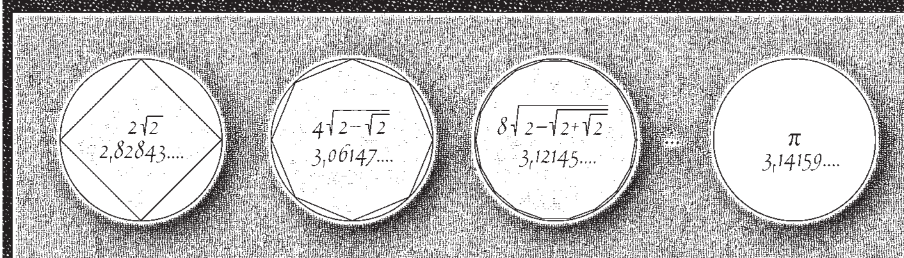


obvod vepsaného šestiúhelníku = 6 (½) = 3 < obvod kruhu = π < obvod opsaného šestiúhelníku = = 6 r = 2√3 = 3,4641…



Na každý pravoúhlý trojúhelník použijeme Pythagorovu větu a vypočítáme délky stran s a t. Pak

obvod čtverce = 4 s = $2\sqrt{2}$ obvod osmiúhelníku = 8 t = $4\sqrt{(2-\sqrt{2})}$



$2^{n-1} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}$ (n − 1 odmocnin) je obvod vepsaného mnohoúhelníku o 2^n stranách.

Cavalieriho princip

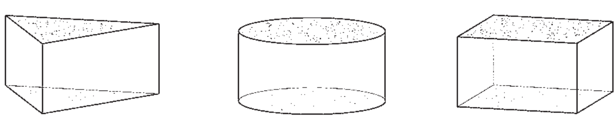
důkaz aproximací pomocí řezů

Slavný princip pojmenovaný po Bonaventurovi Cavalierim (1598–1647) máme dnes k dispozici ve dvou verzích. Pro rovinné objekty zní takto: je-li délka průniku každé vodorovné přímky se dvěma rovinnými objekty stejná, pak mají tyto objekty stejný obsah. Podobně jestliže mají řezy dvou trojrozměrných těles vodorovnými rovinami stejný obsah, potom mají obě tato tělesa stejný objem.

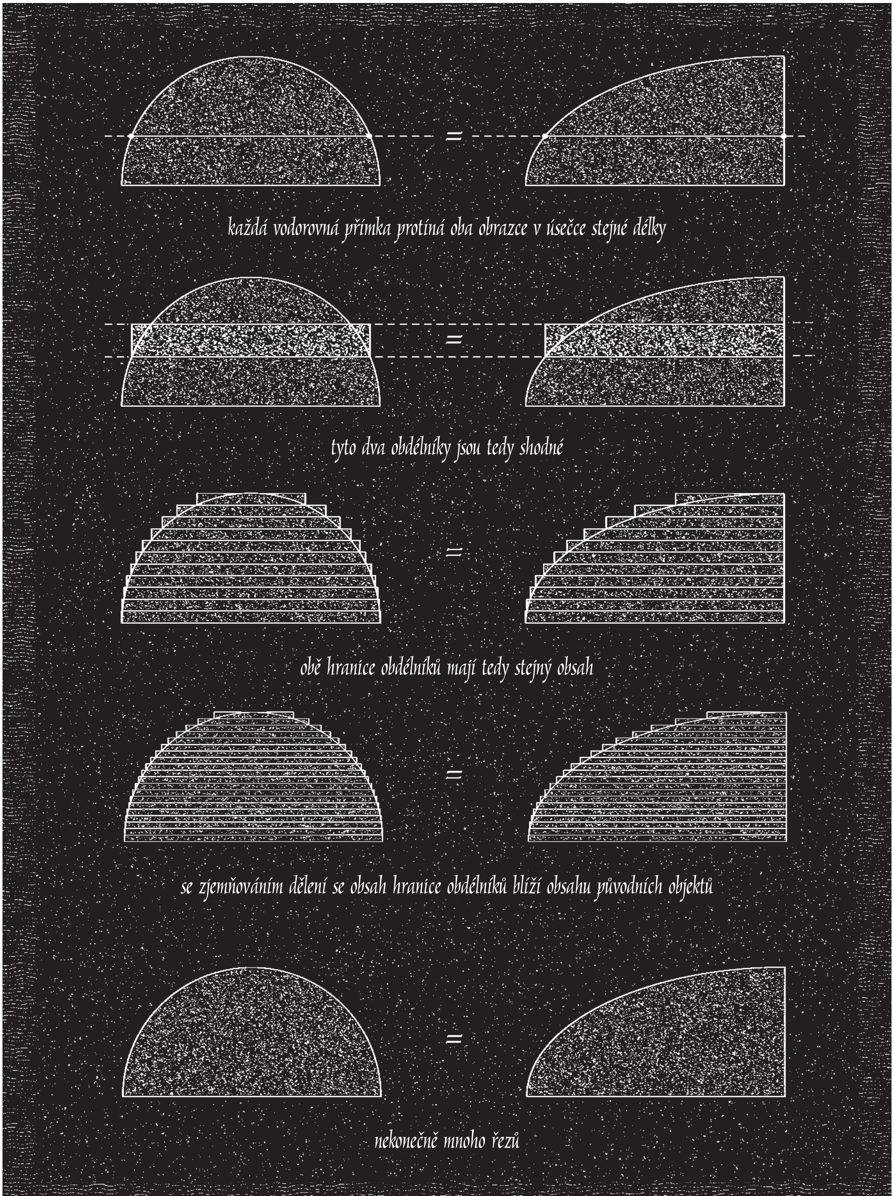
Náčrt důkazu tohoto tvrzení aproximacemi pomocí řezů, který funguje stejně v obou dimenzích, naleznete na protější stránce. Cavalieriho princip představuje krásný příklad užití metody „rozděl a panuj" v matematice. Například pomocí jeho dvojrozměrné verze umíme zredukovat těžký problém výpočtu obsahu na podstatně lehčí úlohu měření délky úseček.

Níže uvádíme několik důležitých vzorců pro výpočet obsahu rovinných obrazců a objemu těles založených na využití Cavalieriho principu.

obsah rovnoběžníku = obsah obdélníku o stejné základně a výšce = základna × výška
obsah trojúhelníku = ½ × obsah rovnoběžníku = ½ × základna × výška



objem hranolu či válce = objem kvádru o stejné základně a výšce = obsah základny × výška


každá vodorovná přímka protíná oba obrazce v úsečce stejné délky
tyto dva obdélníky jsou tedy shodné
obě hranice obdélníků mají tedy stejný obsah
se zjemňováním dělení se obsah hranice obdélníků blíží obsahu původních objektů
nekonečně mnoho řezů

Kavalírské krájení kuželů

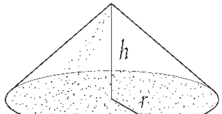
řezání v praxi

S kužely a jehlany se setkáváme neustále, přičemž mohou mít různý tvar i velikost. Hromady písku, mušle přílipek, pyramidy, kostelní věže, vrcholy krystalů, rohy jednorožců a další objekty – všechny mají tento tvar. Každý kužel či jehlan má vrchol a základnu, která může být libovolným dvojrozměrným útvarem.

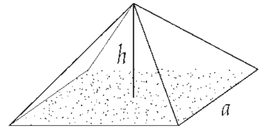
Představíme-li si vrchol jako maják se světelným zdrojem, pak bod leží v kuželu tehdy, padá-li jeho stín na základnu. Dokážeme, že pro objem kužele platí *objem = 1/3 × obsah základny × výška*, z čehož plynou oba dolní vzorce.

Pohrajeme-li si trochu se stínováním (*naproti nahoře*), vidíme, že pro všechny kužely i jehlany o stejné výšce a základnách se stejným obsahem mají řezy kteroukoli vodorovnou rovinou stejný obsah. Cavalieriho princip (*předchozí kapitola*) nám tedy říká, že VŠECHNA tato tělesa mají stejný objem. Stačí tudíž spočítat objem JEDNOHO z nich, například pravoúhlého jehlanu (*naproti uprostřed*). Tento jehlan spolu s dalšími dvěma jeho kopiemi je možné poskládat do kvádru s trojúhelníkovou základnou. Protože mají všechny tři jehlany stejný objem, má každý z nich objem rovnající se jedné třetině objemu tohoto kvádru. Q. E. D.

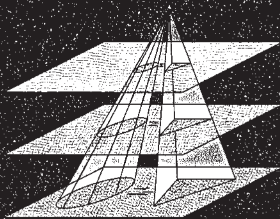
Při řezání krychle na šest jehlanů s trojúhelníkovými základnami ji nejprve rozřízneme diagonální rovinou na dva kvádry s trojúhelníkovými základnami a potom každý z nich na tři jehlany. Také ji lze rozříznout na tři stejné jehlany s čtvercovou základnou (*naproti dole*) a pak každý z nich na jehlan *P3* a jeho zrcadlový odraz. Vyrobíme-li si je všechny z papíru, získáme krásnou skládačku.



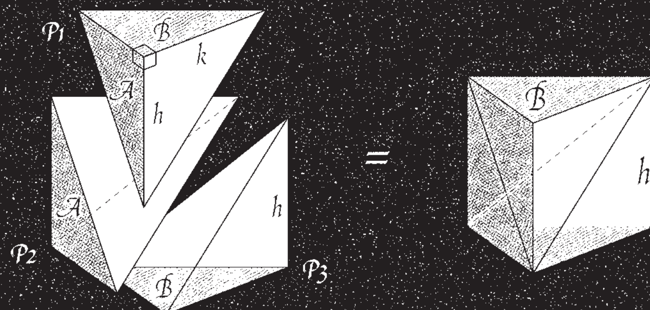
objem hromady písku $= 1/3\,\pi\, r^2\, h$



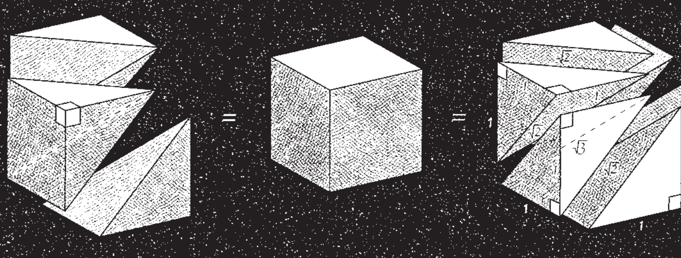
objem jehlanu $= 1/3\, a^2\, h$



bodový maják promítá útvary stejného obsahu do kterékoli rovnoběžné roviny zase na útvary stejného obsahu, takže dva kužely nebo jehlany o stejné výšce a základnách se stejným obsahem mají stejný objem



jehlany P_2 a P_1 mají společnou základnu A a společnou výšku k
jehlany P_1 a P_3 rovněž sdílejí základnu B a výšku h
objem P_1, P_2, P_3 = 1/3 objemu hranolu = 1/3 × obsah základny × výška = 1/3 × B × h



rozřezání krychle na tři identické jehlany se čtvercovými základnami (vlevo) a na šest jehlanů P_3 s trojúhelníkovými základnami

Jehlan v kupce sena

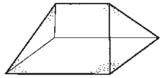
hřebci a hradební valy

Mnohé staré texty obsahují algoritmy pro výpočet obsahu nebo objemu různých geometrických útvarů, ne všechny tyto dávné vzorce jsou však správně. Jeden babylonský zdroj například uvádí, že objem komolého jehlanu je $(1/2(a + b))^2h$, zatímco známý egyptský Rhindův papyrus (asi 1800 př. n. l.) používá správnou formuli $1/3(a^2 + ab + b^2)h$.

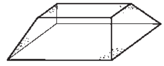
Jedno z nejstarších dochovaných čínských pojednání o matematice *Ťiou-čang suan-šu* 九章算術 (Aritmetika v devíti kapitolách, přibližně 50 př. n. l.) rovněž uvádí tuto verzi vzorce, a Liou Chuej 劉徽 (přibližně 263 n. l.) ve svém komentáři přidává k tomuto vzorci dokonce jeho nádherný důkaz. Rozřízneme komolý jehlan neboli *fang-ťing* 方亭 (čtvercový pavilon) na devět částí, a to na čtyři identické jehlany s trojúhelníkovými podstavami neboli *jang-ma* 陽馬 (hřebce), čtyři hranoly neboli *čchien-tu* 塹堵 (hradební valy) a jeden kvádr. Ty potom poskládáme do kvádru a do jehlanu se čtvercovou základnou. Součet jejich objemů potom dává objem komolého jehlanu (*naproti nahoře*). Q. E. D.

Technika tohoto důkaz sice předpokládá, že známe vzorec pro výpočet objemu jehlanu se čtvercovou základnou (*předchozí kapitola*), zároveň ale nyní můžeme tento vzorec znovuobjevit elegantním způsobem založeném na principu „hada, který sám sobě ukousl ocas“ (*naproti dole*).

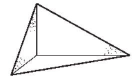
Další tělesa z Liou Chuejova pojednání uvádíme níže.



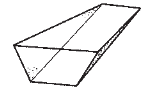
芻甍 *čchu-meng*
krmelec



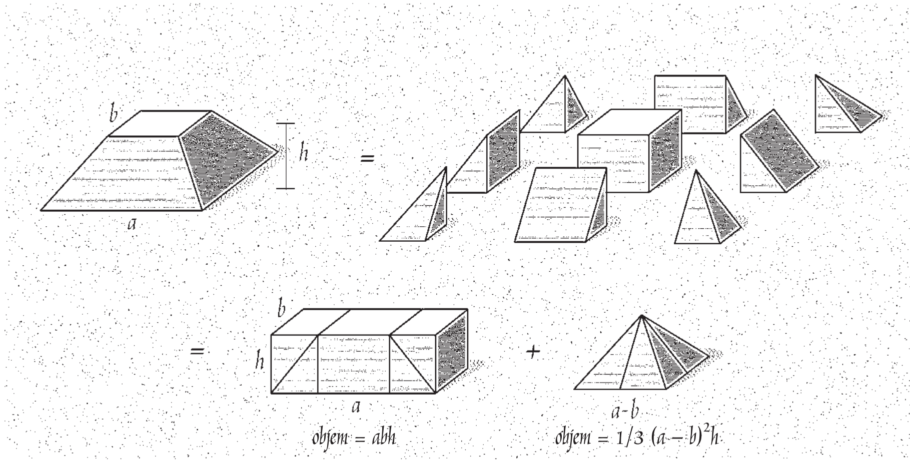
芻童 *čchu-tchung*
krmič zvěře



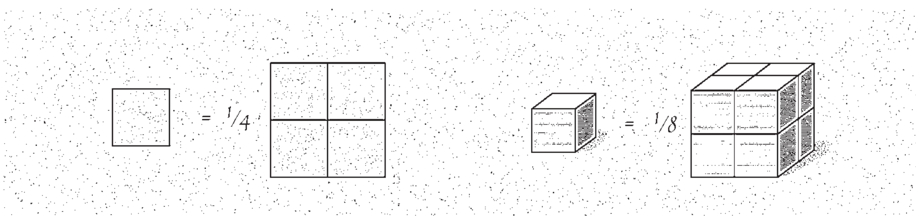
鱉腦 *pie-nao*
želví rameno



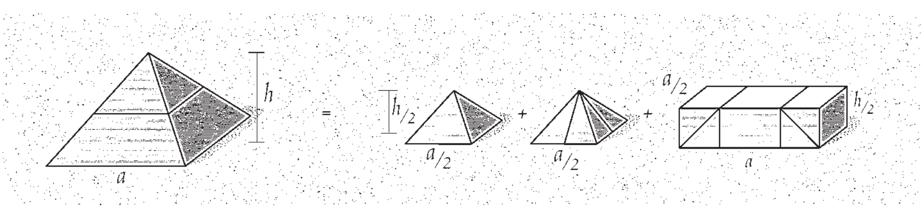
羨除 *sien-čchu*
odtok



Liou Chuej rozdělil komolý jehlan na devět částí: kvádr, čtyři identické jehlany s trojúhelníkovými základnami a čtyři hranoly, které lze poskládat do kvádru a jehlanu se čtvercovou základnou s objemy po řadě abh a $1/3\ (a - b)^2h$. Jejich sečtením získáme vzorec pro objem komolého jehlanu: $1/3\ (a^2 + ab + b^2)h$.



Zdvojnásobíme-li lineární rozměr kteréhokoli rovinného či prostorového objektu, pak se jeho obsah (či povrch) zvýší čtyřikrát a jeho objem osmkrát. Takto můžeme jehlan rozříznout v polovině (dole).



Objem jehlanu $V = 2 \times$ objem jehlánků (po $1/8\ V$) $+ a/2 \times h/2 \times a$.
Proto $3/4\ V = 1/4\ a^2h$, z čehož vyplývá, že objem jehlanu je roven $1/3\ a^2h$.

Archimedova věta

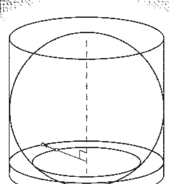
záhady kolem koule

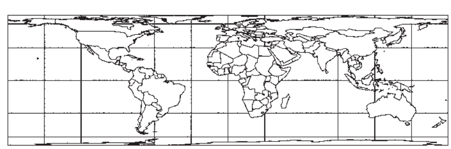
Archimedes dokázal, že se objem koule rovná dvěma třetinám objemu nejmenšího válce, který kouli obsahuje, a že obsah jejího povrchu je roven obsahu povrchu téhož dutého válce bez základen. Tyto vztahy měly pro starověkého filozofa tak velký význam, že si nechal kouli a jí opsaný válec dokonce vytesat na náhrobek.

Na obrázku vidíme odvození vzorce $4/3\ \pi r^3$ pomocí Cavalieriho principu (*strana 16*) pro výpočet objemu koule o poloměru *r*. Tím jsme potvrdili první z Archimedových objevů.

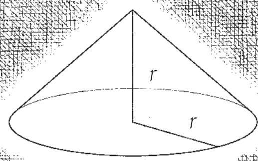
Jestli chcete vidět opravdové kouzlo, tak si promítněte každý bod na povrchu koule kromě pólů do nějakého bodu na válci (*dole*). Dá se dokázat, že potom se touto projekcí zobrazí každý útvar na povrchu koule na nějaký útvar se stejným obsahem na válci. Jestliže za útvar vezmeme celý povrch koule, bude její projekcí celý plášť válce, a tak potvrdíme i druhý Archimedův objev.

Vezmeme-li místo povrchu koule glóbus, provedeme příslušnou projekci na plášť válce a ten potom rozvineme do obdélníku, dostaneme velice užitečnou plochojevnou mapu světa.

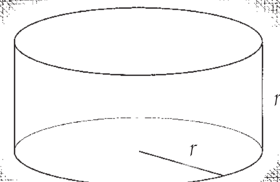




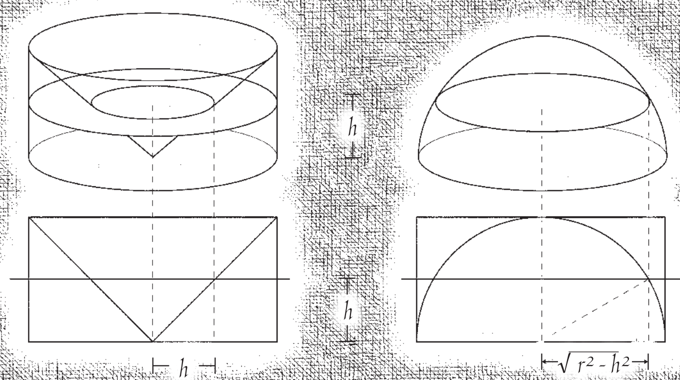
Plochojevná mapa světa podle Johanna H. Lamberta (1728–1777)



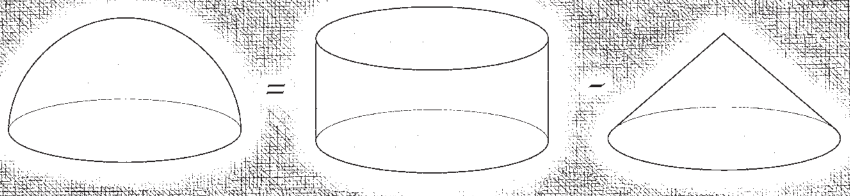
objem válce = πr^3



objem válce = πr^3



obsah mezikruží = $\pi r^2 - \pi h^2 = \pi\,(r^2 - h^2)$ = obsah kruhu
Protože je obsah plochy kruhu a mezikruží stejný, plyne z Cavalieriho principu, že polokoule má stejný objem jako válec s vyříznutým kuželem.



objem polokoule = objem válce – objem kužele = $\pi r^3 - 1/3\ \pi r^3 = 2/3\ \pi r^3$
objem koule = 2 × objem polokoule = $4/3\ \pi r^3$

Svět naruby

dva důkazy pomocí klínů

Archimedova důmyslná myšlenka, jak nalézt vztah mezi vnitřkem a vnějškem koule a kruhu, ukazuje, jak lze v matematice zabít dvě mouchy jednou ranou. Uveďme nyní náznak jeho úvah.

Archimedes nejprve rozdělil kruh o poloměru r na několik stejných klínů (*naproti nahoře*), které potom poskládal do téměř pravoúhlé desky. Povšiml si, že tento úkon lze provádět se stále rostoucím počtem klínů a že čím je jejich počet vyšší, tím spíše bude výsledná deska k nerozeznání od obdélníku, jehož kratší strana je rovna r a delší strana polovině obvodu kruhu. Obsah onoho obdélníku se tedy rovná obsahu kruhu a odtud dostáváme vzorec

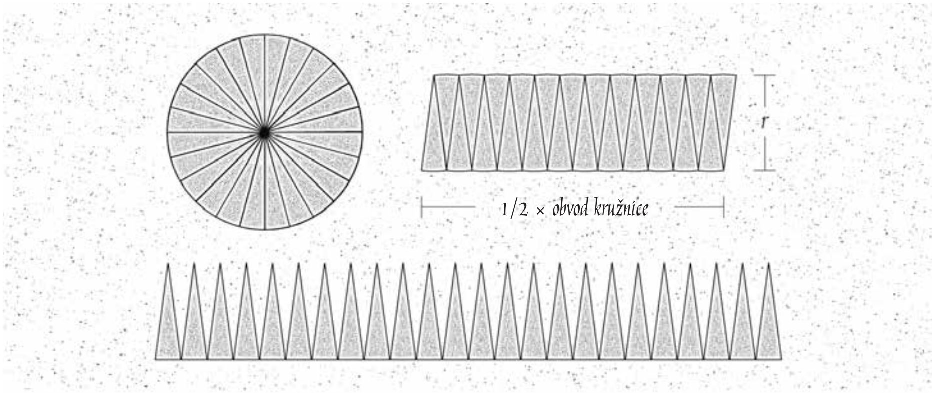
$$\textit{obsah kruhu} = 1/2 \times \textit{obvod kružnice} \times r.$$

Ke stejné formuli dojdeme, spočítáme-li obsah obrazce ve tvaru zubů na pile. Stačí si pouze uvědomit, že každý z „trojúhelníků“ má obsah $1/2 \times \textit{základna} \times r$ a že součet délek základen všech trojúhelníků je roven obvodu kružnice.

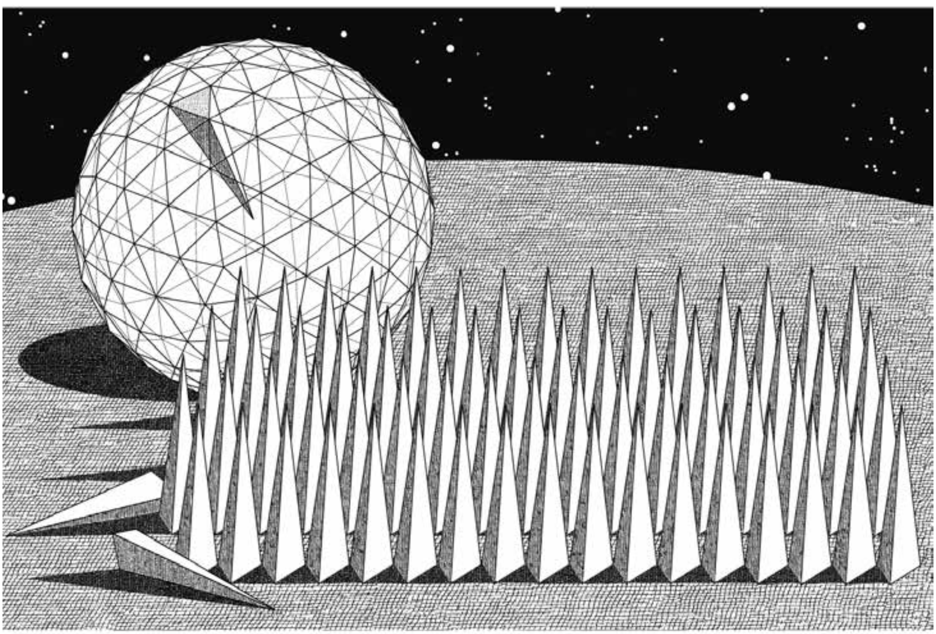
Pro odvození obdobného vzorce pro objem koule o poloměru r Archimedes nejprve kouli rozdělil na trojúhelníkové jehlany, jejichž společným vrcholem je střed koule a jejichž základny jsou částí povrchu koule (*naproti dole*). Tyto jehlany hrají stejnou roli jako trojúhelníky na zubaté pile. Protože objem každého z těchto jehlanů (*strana 18*) je roven $1/3 \times \textit{obsah základny} \times r$, dostáváme vzorec

$$\textit{objem koule} = 1/3 \times \textit{obsah povrchu koule} \times r.$$

A na závěr předvedeme mohutné finále: dosadíme vzorec pro obvod kruhu o poloměru r a vzorec pro objem koule o stejném poloměru (*předchozí kapitola*) do našeho nově odvozeného vztahu a zjistíme, že obsah kruhu je roven $\pi \times r^2$ a obsah povrchu koule je roven $4\,\pi \times r^2$.



obsah kruhu = obsah všech klínů = 1/2 × obvod kružnice × r



objem koule = objem všech jehlanů = 1/3 × obsah povrchu koule × r

Matematické domino

důkaz matematickou indukcí

Když očíslované kostky domina postavíme do řady tak, aby platilo, že JESTLIŽE se překotí kostka n, pak se překotí i kostka ($n + 1$), PAK při překocení první kostky máme naprostou jistotu, že se jednou překotí i kterákoli jiná kostka.

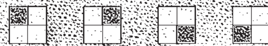
Důkaz indukcí je matematickou obdobou této úvahy, pouze místo kostek máme nekonečný počet tvrzení očíslovaných všemi přirozenými čísly. POKUD zaručíme pravdivost prvního A ZÁROVEŇ to, že z pravdivosti n-tého tvrzení vyplývá pravdivost ($n + 1$)-tého tvrzení, najisto víme, že jsou pravdivá všechna.

První tři řádky obrázku naproti ukazují, jak funguje důkaz následující věty:

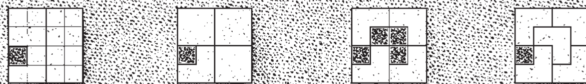
VĚTA: Každou šachovnici tvaru $2^n \times 2^n$, na níž chybí jedno políčko (dále jen „poškozená šachovnice“), lze pokrýt kostkami tvaru L složenými ze tří políček.

DŮKAZ INDUKCÍ: Poškozená šachovnice 2×2 je sama tvaru L (*naproti nahoře*), takže ji lze pokrýt jednou kostkou. Tvrzní tedy platí pro $n = 1$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí až do čísla n. Vezmeme poškozenou šachovnici $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ a rozčtvrtíme ji. Dostaneme čtyři šachovnice $2^n \times 2^n$, z nichž právě jedna je poškozená. Ze zbývajících tří šachovnic odstraníme po jednom políčku přileh-lém ke středu té původní (*naproti uprostřed*). Vzniknou tak čtyři poškozené šachovnice $2^n \times 2^n$, ty už ale podle indukčního předpokladu umíme pokrýt kostkami tvaru L. Zbývají jen tři odstraněná políčka, která však musí být ve tvaru L. Tím jsme pokryli celou poškozenou šachovnici typu $2^{n+1} \times 2^{n+1}$. Q. E. D.

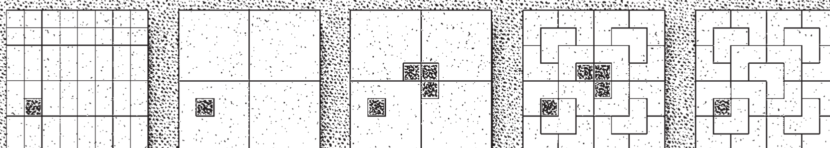
Do matematických důkazů se promítají i některá další schémata, která můžeme při převracení kostek domina vypozorovat. Postavíme-li kostky do trojúhelníkového tvaru (*naproti dole*), pak první kostka opět převrátí všechny ostatní. Odpovídající důkazovou technikou můžeme například ověřit, že Pascalův trojúhelník, pojmenovaný po Blaise Pascalovi (1623–1662), je tvořen binomickými koeficienty (*strana 48*).



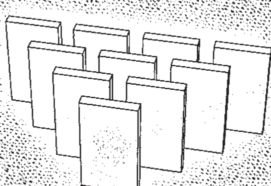
Poškozenou šachovnici typu 2 × 2 lze pokrýt jednou kostkou tvaru L.



Poškozenou šachovnici typu 4 × 4 rozčtvrtíme a vyhodíme tři středová políčka. Dostaneme čtyři poškozené šachovnice typu 2 × 2. Každou lze pokrýt kostkou tvaru L. Tato úvaha naznačuje, jak pokračovat dál.



Poškozenou šachovnici typu 8 × 8 rozčtvrtíme a vyhodíme tři středová políčka. Dostaneme čtyři poškozené šachovnice typu 4 × 4. Každou z nich pokryjeme kostkami tvaru L. Nakonec položíme poslední kostku na tři vyhozená středová políčka. Celkově získáme pokrytí celé poškozené šachovnice typu 8 × 8.



$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Jeden z důkazů toho, že oba trojúhelníky jsou identické, je založen na „převratném" principu na obrázku vlevo. Stačí si uvědomit, že každá položka v obou trojúhelnících je součtem dvou položek nad ní a že $\binom{0}{0} = 1$.

Nekonečné schodiště

důkaz přeskupením

Klasický paradox pojednává o hromadě stejně velkých cihel položených na sebe na kraji stolu (*naproti*). Není těžké dokázat, že postupným přidáváním dalších a dalších cihel můžeme nechat celou stavbu vyčnívat tak daleko dopředu, jak se nám zlíbí.

Schodiště sestavené z n cihel, z nichž každá má délku 2, vyčnívá dopředu o vzdálenost danou vzorcem

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Stačí tedy dokázat, že s rostoucím n se tento součet blíží k nekonečnu.

Důkaz: Nejprve seskupíme sčítance podle následujícího schématu:

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \cdots\right.$$

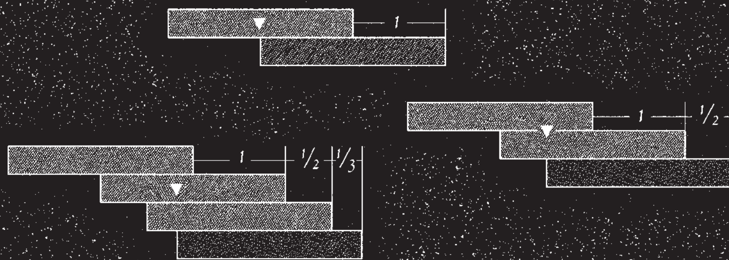
Potom každou závorku nahradíme výrazem, který je menší než výraz v závorce nebo nejvýše mu roven, a povšimneme si, že řada, kterou takto obdržíme, nemá konečný součet:

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots\right.}_{\frac{1}{2}}$$

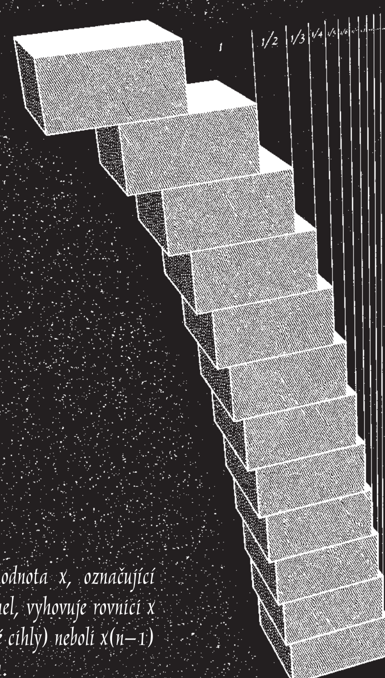
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

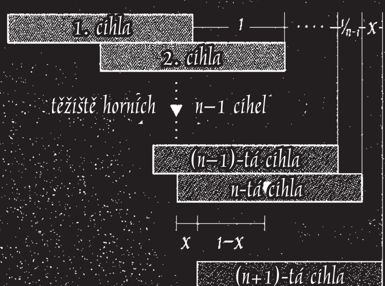
Odtud plyne, že ani původní řada nemohla mít konečný součet. Q. E. D.

Povšimněme si, že schodiště narůstá nejen do nekonečné šíře, ale také do nekonečné délky, a hlavně že jeho stavba se velmi rychle stává nesmírně ošidnou, protože se musíme potýkat se stále menšími a menšími rozestupy mezi sousedícími cihlami.



Při konstrukci schodiště, které se nepřekotí a má maximální převis, postupujeme shora dolů, přičemž v každém kroku zaručíme, že těžiště objektu, který jsme sestrojili, bezpečně leží nad okrajem cihly, která přijde na řadu vzápětí.





Pak z jednoduché fyzikální úvahy vyplývá, že hodnota x, označující vzdálenost od kraje n-té cihly k těžišti prvních n cihel, vyhovuje rovnici $x \times$ (hmotnost $n-1$ cihel) $= (1-x) \times$ (hmotnost jedné cihly) neboli $x(n-1) = 1-x$. Vyřešením této rovnice dostaneme $x = 1/n$.

Kolem cykloidy

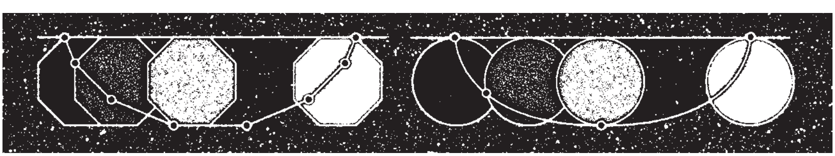
důkaz řezem

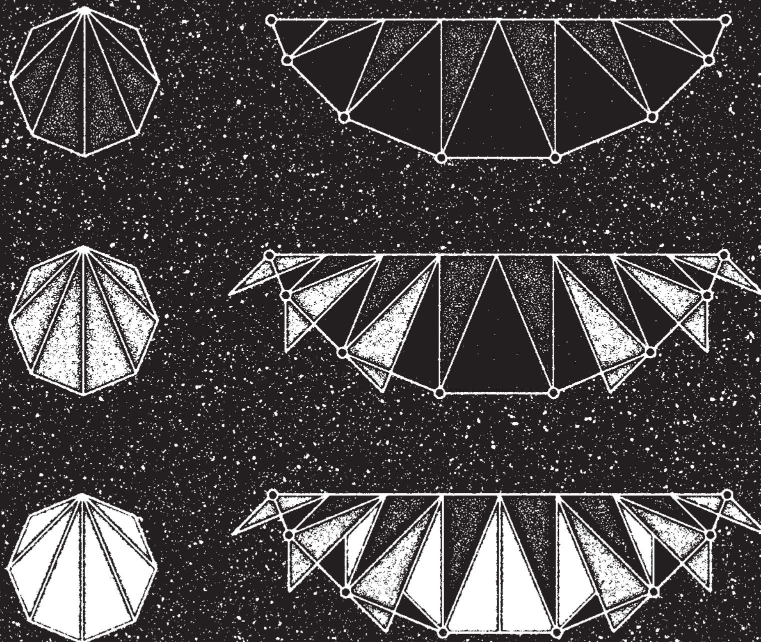
Vezmeme pravidelný mnohoúhelník, označíme barvou jeden z jeho vrcholů a necháme jej kutálet zespoda po přímce. Pokaždé, když se mnohoúhelník zastaví na některé ze svých stran, označíme tečkou polohu obarveného vrcholu. Proces zastavíme v okamžiku, kdy se obarvený vrchol vrátí na přímku. Místa označená tečkami pak pospojujeme úsečkami (*dole vlevo*). Rozřezáním mnohoúhelníku snadno a rychle zjistíme, že obsah útvaru pod přímkou vymezeného výslednou křivkou je přesně trojnásobkem obsahu původního mnohoúhelníku (*naproti nahoře*).

Použijeme-li místo mnohoúhelníku kruh, vznikne křivka zvaná cykloida (*dole vpravo*), kterou používali (spolu s dalšími příbuznými křivkami) staří Řekové k popisu planetárních drah. Vzhledem k tomu, že kruh je možno aproximovat pomocí pravidelných mnohoúhelníků, musí se obsah útvaru vymezeného cykloidou pod přímkou také rovnat trojnásobku obsahu kruhu.

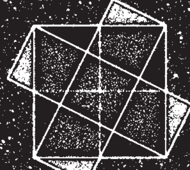
Cykloida má mnoho dalších důležitých vlastností. Například v roce 1606 využil cykloidu Johann Bernoulli k řešení nesmírně obtížného „problému nejkratšího spádu“ a prokázal tak impozantní sílu tehdy právě nově objeveného Newtonova a Leibnizova infinitezimálního počtu neboli kalkulu. Bernoulli dokázal, že jestliže hmotný bod ovládaný pouze gravitací sklouzne z jednoho bodu do druhého po cykloidě, pak se tento proces odehraje rychleji, než kdyby se pohyboval po jakékoli jiné křivce spojující oba body.

Pokuste se sami pochopit dva „důkazy na první pohled“ (*naproti dole*).





Tři osmiúhelníky přesně vyplní plochu, kterou vytvořil jeden z nich při kutálení po přímce.



malý čtverec = 1/5 velkého

obsah 12úhelníku v kruhu o poloměru 1 je 3

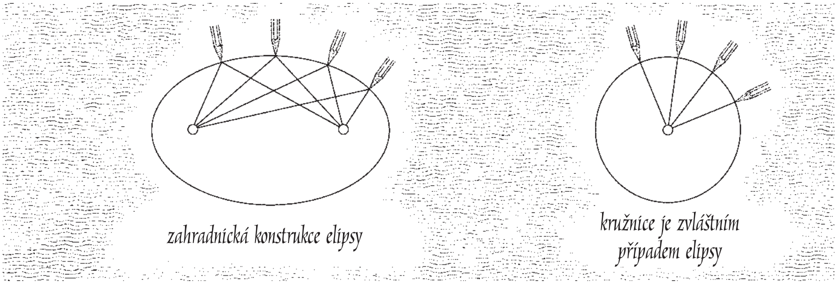
Krájení kuželů

Dandelinovo kouzlo sfér

Jakou křivku obdržíme, rozřízneme-li rovinou kužel s kruhovou základnou na horní a dolní část? Možná že odpověď odporuje intuici, ale výslednou křivkou bude vždy elipsa. Elipsa je křivka, kterou získáme, připíchneme-li dva konce provázku ke stolu, provázek napneme a tužkou opíšeme uzavřenou křivku (*dole*). Jinými slovy, elipsa je množina všech bodů v rovině, které mají konstantní součet vzdáleností od dvou daných bodů, které nazýváme ohnisky.

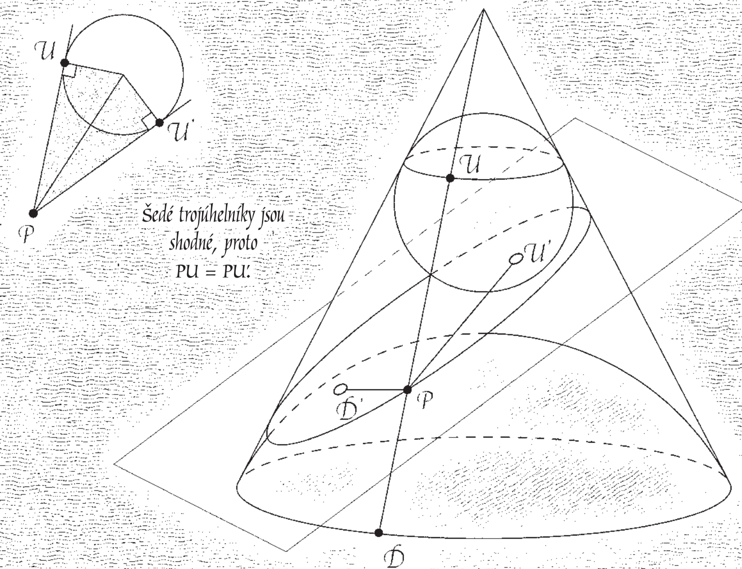
Aby uvedené tvrzení o řezu kuželem dokázal, vepsal Germinal Pierre Dandelin (1794–1847) do kuželu dvě koule tak, aby se jedna z nich dotýkala roviny řezu shora a druhá zespoda (*naproti nahoře*). Poté ověřil, že křivka řezu je skutečně elipsou, body styku obou koulí s rovinou jsou jejími ohnisky a výše uvedená konstanta je rovna vzdálenosti mezi dvěma kružnicemi, v nichž se obě koule dotýkají kužele.

Podobně je možné dokázat, že křivkou řezu kuželu rovinou je elipsa, hyperbola nebo parabola, případně že (pokud rovina řezu prochází vrcholem kuželu) tato křivka degeneruje do bodu, přímky nebo dvojice přímek. Newton prokázal, že dvě nebeská tělesa kolem sebe vždy obíhají po jedné z těchto křivek, takže například planety obíhají kolem Slunce po elipsách, přičemž Slunce se nachází v jednom z ohnisek.

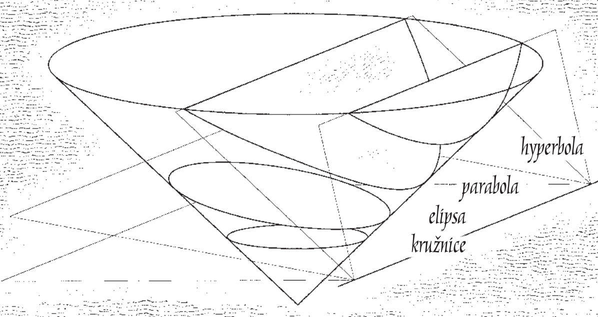


zahradnická konstrukce elipsy

kružnice je zvláštním případem elipsy



Protože se úsečky PU a PU′ dotýkají horní koule, platí PU′ = PU. Podobně platí PD′ = PD a tedy PU′ + PD′ = PU + PD = UD, což je vzdálenost mezi oběma kružnicemi dotyku.



Nakláněním roviny řezu obdržíme nejprve ve vodorovné poloze kružnici, potom elipsy, pak vzácnou parabolu (při jediném úhlu náklonu) a nakonec přijdou hyperboly.

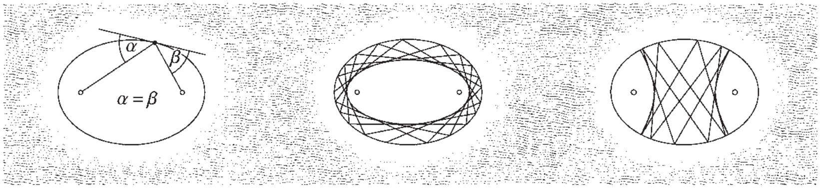
Křivky z přehybů

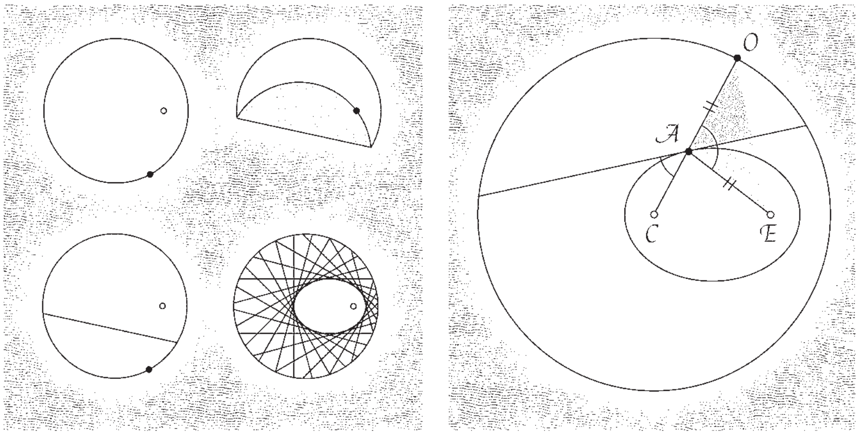
hořící zrcadla a šeptající galerie

Vyznačte bod na kruhovém papíru a přehněte papír tak, aby se do tohoto bodu ohnul některý bod z okraje kruhu. Vznikne křivka přehybu. Zopakujte tento proces několikrát. Za chvíli se objeví elipsa (*naproti nahoře*).

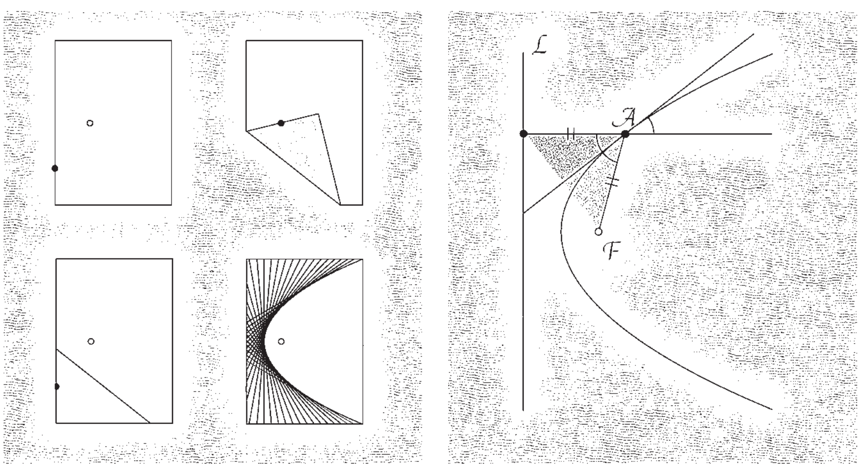
Důkaz tohoto kouzla se opírá o definici ohnisek elipsy (*předchozí kapitola*) a o důvod, proč je vlastně nazýváme „ohnisky“: vyrobíme-li kolem vnitřku elipsy zrcadlovou stěnu, pak se každý paprsek světla vyzářený z jednoho ohniska odrazí do druhého (*dole vlevo*). Tohoto principu se využívá při stavbě koncentračních zrcadel a šeptajících galerií. Umístíme-li hořící svíčku do ohniska elipsy, pak se teplo z ní vyzářené bude koncentrovat ve druhém ohnisku. Zašeptáme-li něco v jednom z ohnisek velké haly tvaru elipsy, náš kolega stojící ve zbývajícím ohnisku, i kdyby bylo hodně daleko, nás zcela zřetelně uslyší. V obecném případě tvoří paprsky, které se do ohnisek netrefí, jakési „obálky“ k jiným elipsám či hyperbolám, sdílejícím s původní elipsou stejná ohniska (*dole uprostřed a vpravo*).

Vezmeme-li místo kruhového papíru papír obdélníkový a budeme jej přehýbat jen z jedné jeho strany (*naproti dole*), pak obdržíme část paraboly. Díky tomuto procesu snadno odvodíme definici paraboly vyjádřenou pomocí ohniska a řídící přímky a také pochopíme, jak možná přišel Archimedes na nápad sestavit sadu parabolických zrcadel a využít je ke spálení nepřátelských lodí.





Úsečka AO se přehne na AE, tedy AE + AC = AO + AC = poloměr. Při pohybu O po kružnici opisuje bod A elipsu s ohnisky C a E, jejíž konstantou je tento poloměr. Tři úhly vyznačené u bodu A jsou si rovny. Křivky přehybu jsou tedy tečnami elipsy a vytvářejí její obálku.



Vznik paraboly s ohniskem F a řídicí přímkou L: (1) bod A je stejně daleko od bodu F i od přímky L. (2) Každý vodorovný paprsek světla je parabolou odražen do ohniska F.

Uzly a mnohoúhelníky

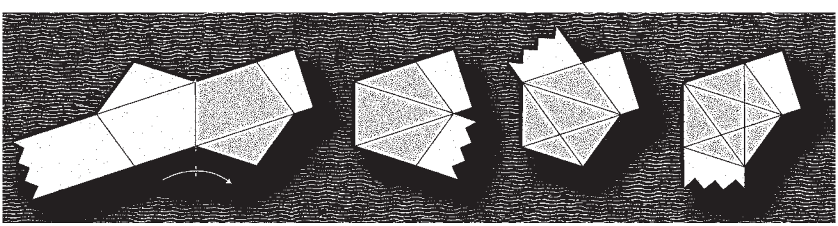
důkaz ohýbáním papíru

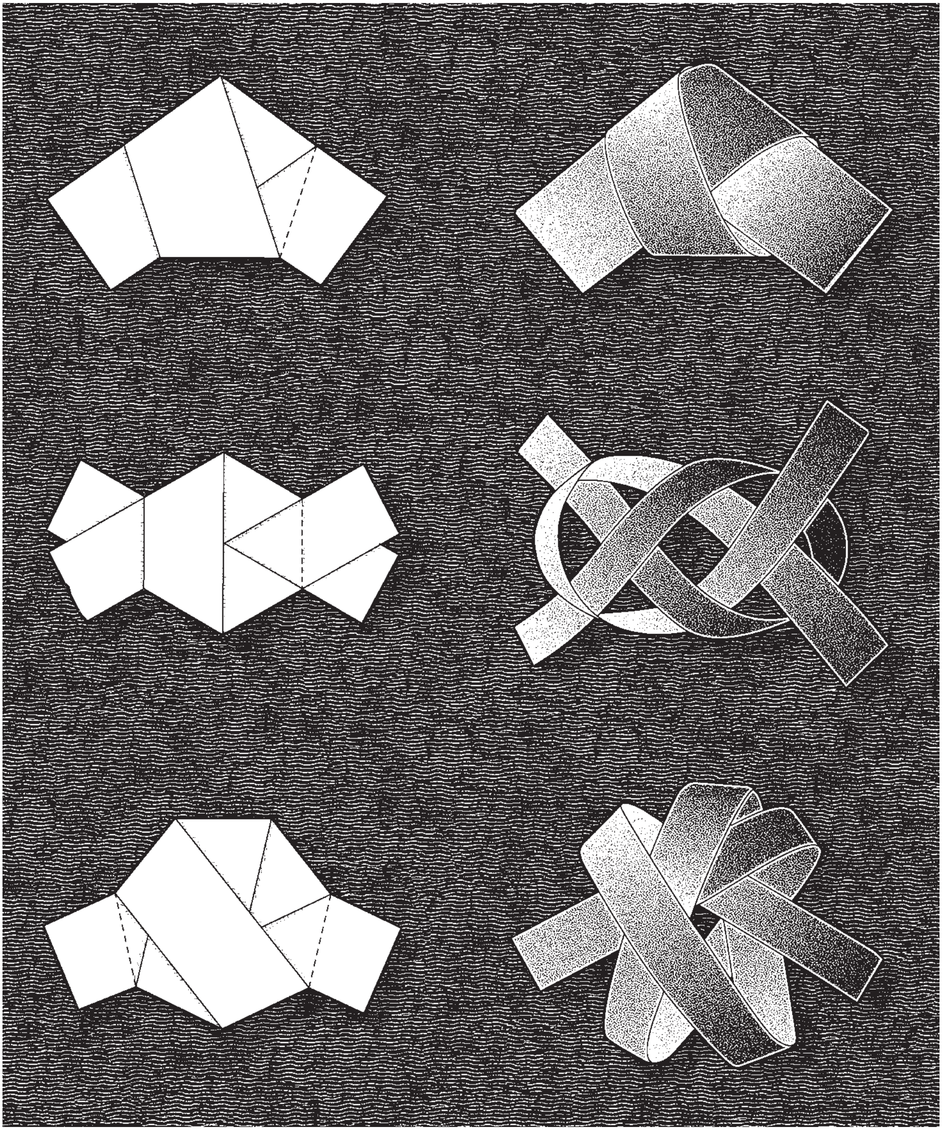
Sestrojit rovnostranné trojúhelníky, čtverce či pravidelné šestiúhelníky lze mnoha způsoby. Pravidelné pětiúhelníky jsou trochu obtížnější, ale nějaký jednoduchý recept na jejich konstrukci se také najde.

Uvažte uzel na pásku papíru a zatáhněte za okraje. Tahejte tak dlouho, dokud se uzel zcela nevyhladí. Odstřihněte papír přečnívající na krajích. Dostanete pravidelný pětiúhelník. Jak to?

Vezměme dva pravidelné pětiúhelníky se společnou stranou a proužek papíru probíhající skrz oba (*dole vlevo*). Přehneme-li levý pětiúhelník na jeho kolegu vpravo podél společné strany, pak přehnutý proužek povede úhledně kolem jedné ze stěn pětiúhelníku vpravo. Zopakujeme-li tento proces několikrát, označíme postupně všechny jeho strany a úhlopříčky. Nyní zpřehýbaný proužek papíru rozbalíme a pětiúhelníky zahodíme. V tomto okamžiku lze na proužku uvázat uzel a vyhladit jej tak, aby se žádné nové přehyby neobjevily.

Pro mnohoúhelníky o více než pěti stranách také existují podobné recepty s jedním nebo dvěma proužky papíru, ale jejich praktické využití bývá často poněkud obtížné.





Krájení čtverců

nové pohledy na staré recepty

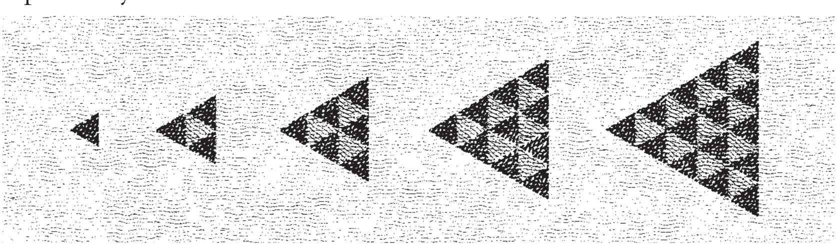
Často někdo dokáže nějakou nádhernou větu jen díky tomu, že je schopen nového pohledu na určitá stará, dobře známá schémata. Klasickým příkladem, jenž se datuje snad až někam k pythagorejcům, jsou výsledky, které obdržíme pomocí rozličných chytře vymyšlených rozdělení čtvercového pole s $n \times n$ (čili n^2) oblázky.

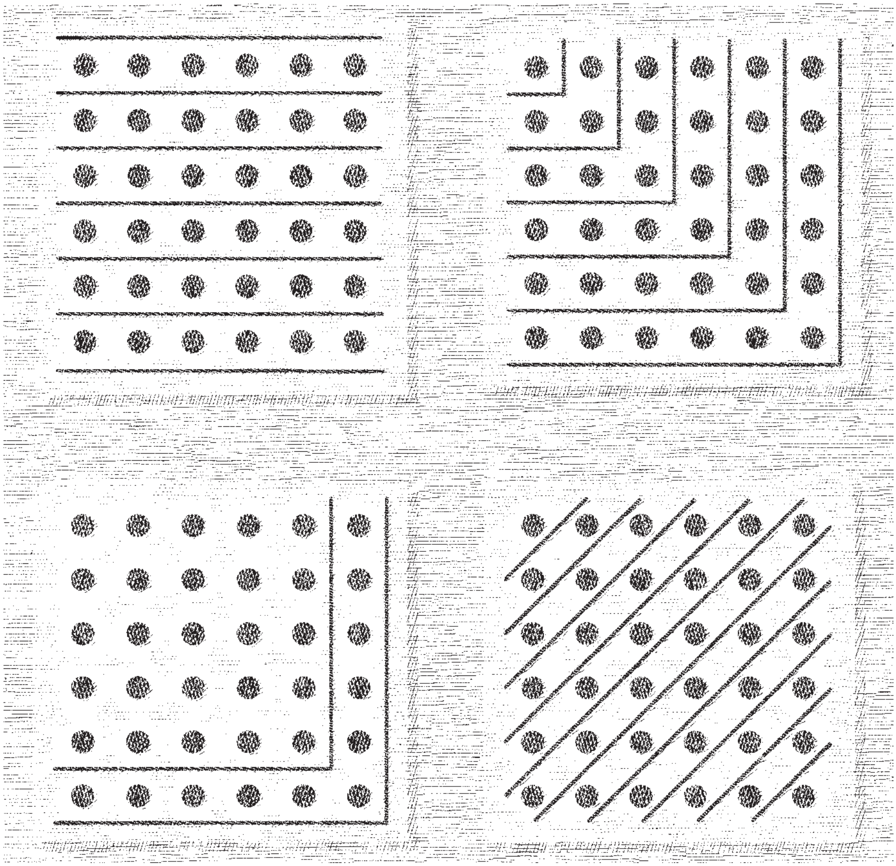
Naším prvním způsobem dělení čtverce odvodíme zatím jen elementární rovnost $n + n + \ldots + n$ *(n-krát)* $= n^2$.

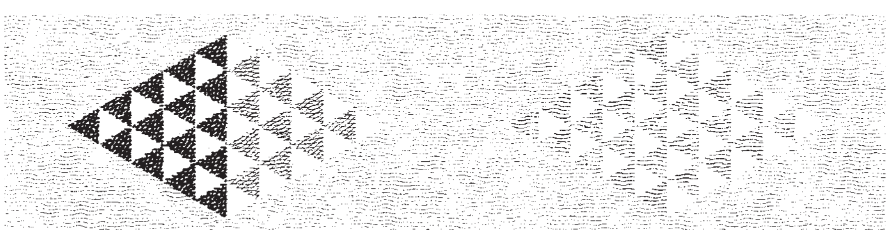
Druhý způsob dělení nám ale poskytne již o něco méně triviální a možná trochu překvapivý fakt, že součet prvních *n* lichých čísel se rovná hodnotě n^2. Jiný důkaz tohoto tvrzení dostaneme, povšimneme-li si, že počty trojúhelníků v jednotlivých sloupcích *n*-té dlaždice (*dole*) tvoří prvních n lichých čísel. Oddělíme-li od sebe černé a šedé trojúhelníky (*naproti dole*), dostaneme zkosený čtverec obsahující právě n^2 trojúhelníků.

Třetí způsob dělení je blízký příbuzný způsobu předcházejícího a odpovídá rovnosti $(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2$. Najdeme-li *n* takové, aby číslo $2n - 1$ bylo druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, dostaneme pythagorejskou trojici (*strana 10*). Například $2n - 1 = 3^2$ dává $n = 5$, a tedy $4^2 + 3^2 = 5^2$.

A konečně poslední způsob porcování čtverce ukazuje, že se hodnotě n^2 rovná součet prvních *n* přirozených čísel plus součet prvních $n - 1$ přirozených čísel. Dokážete z tohoto vztahu dovodit vzorec pro součet prvních *n* přirozených čísel?







Součty mocnin

důkaz dvojím výpočtem

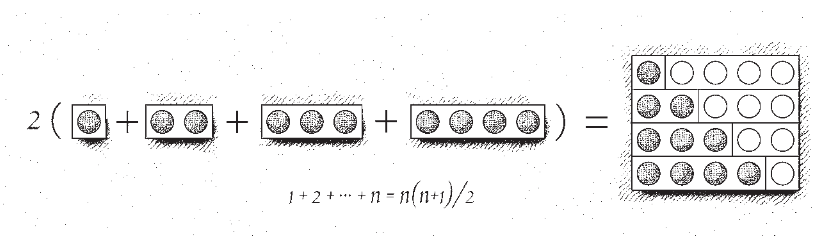
Kouzelný pythagorejský důkaz skládačkou, který je jasný na první pohled, ukazuje, že součet prvních n přirozených čísel je roven polovině počtu oblázků nacházejících se v obdélníku o stranách délek n a $(n + 1)$, tedy číslu $n(n + 1)/2$. Jeden z gigantů světové matematiky Carl Friedrich Gauss (1777–1855) objevil tento vzorec v deseti letech. Když mu učitel uložil sečíst prvních sto přirozených čísel, zkrátil si tento zdánlivě otravný a zdlouhavý úkol pomocí jednoduchého pozorování, že

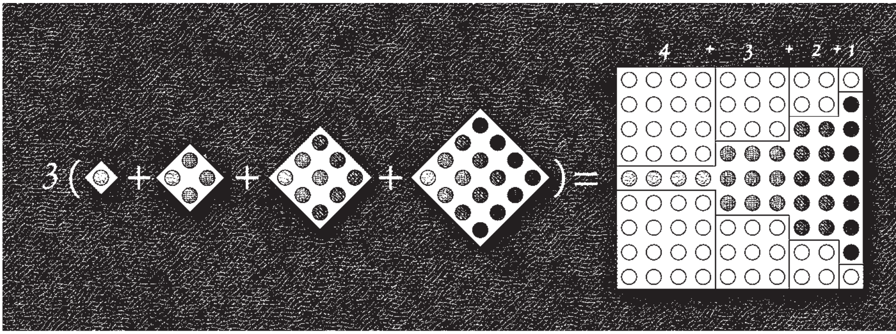
$$1 + 100 = 2 + 99 = \ldots = 50 + 51 = 101,$$

a tedy že musí být hledaný součet roven hodnotě $50 \times 101 = 5\,050$. Prozkoumáme-li pečlivě obrázek dole pěkně řádek po řádku, dostaneme obdobu této úvahy: $1 + 4 = 2 + 3 = 5$, takže součet je roven $2 \times 5 = 10$.

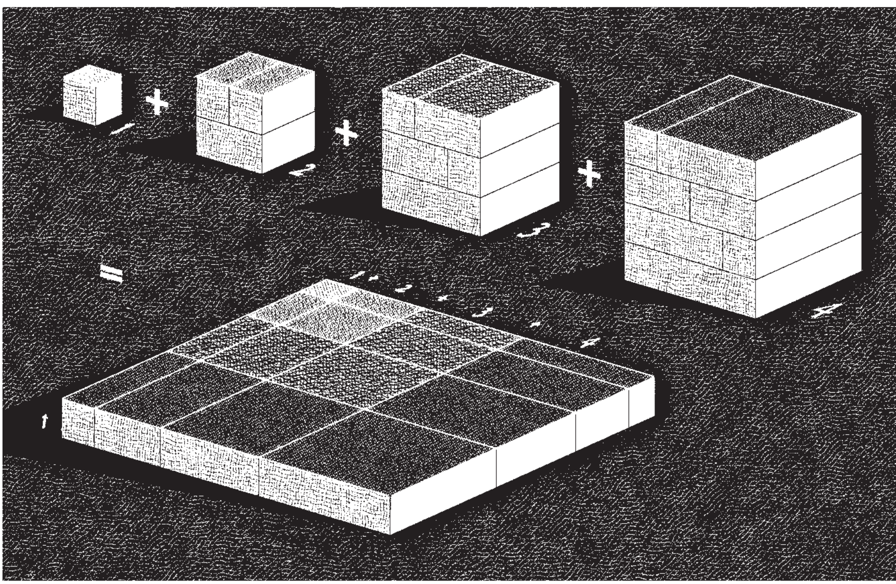
Na prvním diagramu naproti vidíme elegantní důkaz toho, že trojnásobek součtu prvních n druhých mocnin je roven počtu oblázků v obdélníku, tedy číslu $(2n + 1)(1 + 2 + \ldots + n)$.

Druhý diagram naproti ilustruje fakt, že součet prvních n třetích mocnin je roven druhé mocnině součtu prvních n přirozených čísel.





Obecně platí $3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = (1 + 2 + \ldots + n)(2n + 1)$. Dosadíme-li do vzorce $(1 + 2 + \ldots + n) = n(n + 1)/2$, dostaneme vztah $(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n(n + 1)(2n + 1)/6$.



Součet objemů krychlí $(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$ je roven hodnotě $(1 + 2 + \ldots + n)^2$, což je přesně objem čtvercové destičky. Dostáváme vzorec $(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Prvočísla bez konce

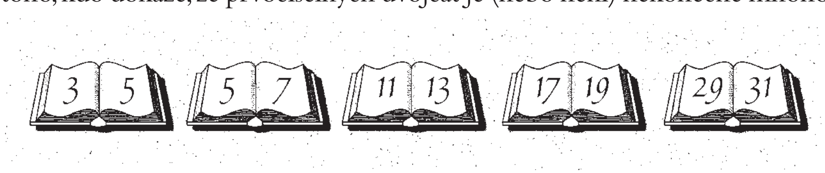
důkaz sporem

Stejně jako lze každý předmět v reálném světě jednoznačně rozložit na dále nedělitelné částečky – atomy, tak je také možné zapsat každé přirozené číslo právě jedním způsobem ve tvaru součinu dále nerozložitelných činitelů, kterým říkáme prvočísla (číslo 1 je jedinou výjimkou). Osm nejmenších prvočísel je 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Eratosthenovo síto (*naproti*) představuje elegantní metodu k sestrojení všech prvočísel.

Uvedeme nyní jednu klasickou ukázku důkazu sporem pocházející z Eukleidovy knihy *Základy*. Jde o důkaz toho, že na rozdíl od počtu atomů v reálném světě obsahuje svět čísel nekonečné množství prvočísel.

Důkaz: Prvočísel je buď konečně mnoho, nebo nekonečně mnoho. Předpokládejme, že jich je jen konečně mnoho. Pak je můžeme všechna mezi sebou vynásobit. Dostaneme nějaké nejspíš hodně velké číslo $n = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots$. Číslo $n + 1$ je pak samozřejmě větší než kterýkoli z dělitelů čísla n, a je tedy větší než kterékoli prvočíslo. Samo tudíž nemůže být prvočíslem. To znamená, že alespoň jeden z dělitelů čísla n musí být zároveň dělitelem čísla $n + 1$. Jestliže tomu tak ale je, pak tento společný dělitel čísel n a $n + 1$ musí být také dělitelem čísla $(n + 1) - n = 1$. To však je spor. Náš původní předpoklad o konečném počtu všech prvočísel musel být tudíž mylný. Tedy existuje nekonečně mnoho prvočísel. Q. E. D.

Prvočíselnými *dvojčaty* nazýváme každou dvojici prvočísel, jejichž rozdílem je 2, tedy například dvojici (5, 7) nebo dvojici (11, 13). Věčná sláva čeká toho, kdo dokáže, že prvočíselných dvojčat je (nebo není) nekonečně mnoho.



Eratosthenovo síto

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Zakroužkujme všechny násobky 2 (kromě 2 samotné). Dalším nejmenším nezakroužkovaným číslem je nyní 3. Označme všechny násobky 3. Následujícím neoznačeným číslem je 5. Označme násobky 5 – a takto pokračujme dál a dál. Neoznačena zůstanou právě všechna prvočísla.

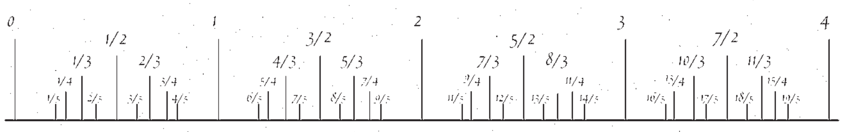
Letora čísel

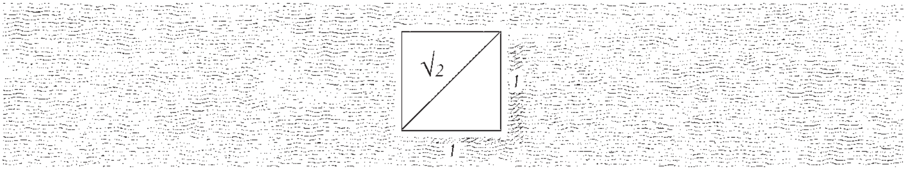
ještě jeden důkaz sporem

Každý bod číselné osy (*dole*) ztělesňuje některé z oněch reálných čísel, jimiž poměřujeme vzdálenosti, obsahy a objemy těles. Rozdělíme-li každou proluku mezi dvěma vedle sebe stojícími celými čísly na dvě, tři nebo čtyři stejně velké části a tak dále, pak se nám na číselné ose objeví zástupci zlomků neboli racionálních čísel. Sebekratší úsečka na číselné ose obsahuje takových čísel nekonečně mnoho, a tak bychom se mohli téměř oprávněně domnívat, že by snad úplně každé reálné číslo mohlo být nějakým takovým zlomkem. To by ale byla velká mýlka. Když pythagorejci objevili překvapující fakt, že číslo $\sqrt{2}$ (neboli délka úhlopříčky čtverce o jednotkové straně) není racionálním číslem, údajně na oslavu svého objevu provedli hekatombu, tedy oběť stovky volů.

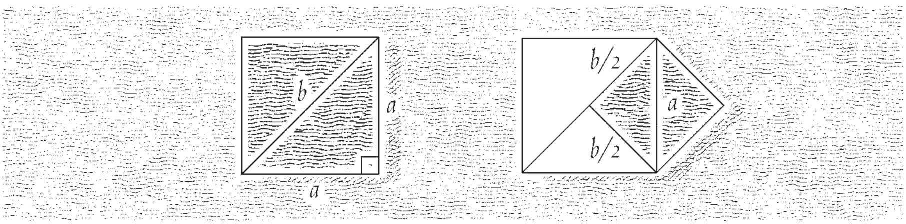
Důkaz tohoto faktu (*naproti*) je dalším příkladem důkazu sporem. Na počátku předpokládáme, že číslo $\sqrt{2}$ je racionální. Z tohoto předpokladu pak nejprve vyvodíme existenci takzvaného celočíselného čtverce (to je čtverec, jehož strany i úhlopříčky mají celočíselné délky) a postupně i evidentní spor. Z něj pak vyplývá, že náš předpoklad musel být nesprávný. Odtud plyne, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Obecně lze ukázat, že jestliže nějaké přirozené číslo není druhou mocninou jiného celého čísla, pak je odmocnina z tohoto čísla číslem iracionálním. Z toho pak dále plyne, že z poloměrů odmocninové spirály (*naproti dole*) jich je nekonečně mnoho iracionálních. Dá se dokonce dokázat, že iracionálních čísel je v jistém smyslu vskutku o hodně více než čísel racionálních.

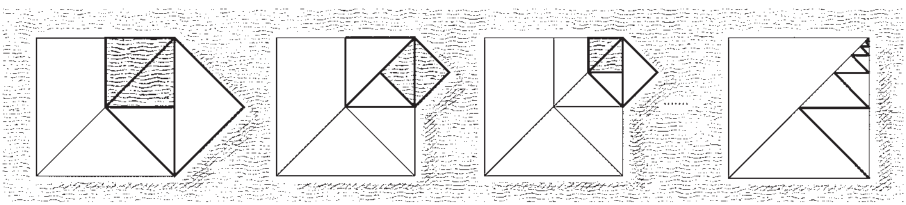




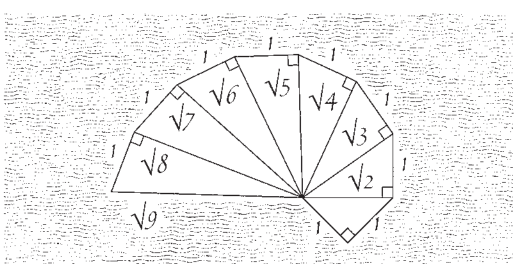
Pokud lze $\sqrt{2}$ zapsat jako podíl celých kladných čísel a/b, je a-krát zvětšený horní čtverec (dole vlevo) celočíselný. Podle Pythagorovy věty $a^2 + a^2 = 2a^2 = b^2$, proto je b^2 sudé.



Pak je sudé i b, tedy b/2 musí být celé a malý šedivý čtverec (vpravo) je také celočíselný. Stejný postup tedy uplatníme na něj, dostaneme ještě menší čtverec třetí, pak čtvrtý a tak dále.



Každá úsečka na klikatici (vpravo) je stranou některého z celočíselných čtverců, má tedy celočíselnou délku. To ale nelze, protože se zmenšují do nekonečna, zatímco nejmenším přirozeným číslem je 1.



Zlatý řez

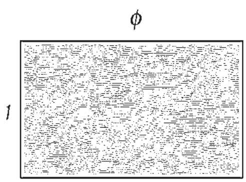
oblíbené číslo matky přírody

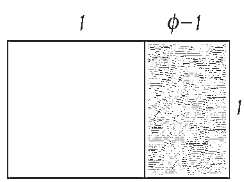
Jak by měl vypadat správný obdélník, aby nebyl moc úzký ani moc široký, ale na pohled ten nejhezčí? Mnoho mistrů věd i umění všech věků v tom mělo jasno: vítězem je obdélník zvaný „zlatý“ (*dole vlevo*), u nějž je poměr délek delší strany ku kratší roven zlatému číslu Φ (fí), které se rovná poměru délek úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku a jeho strany (*naproti nahoře*).

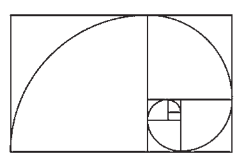
Stopy zlatého řezu nalezneme na mnoha přírodních vzorech od uspořádání listů na rostlině po spirálovitý tvar galaxií. Zlatý obdélník má mnoho pozoruhodných vlastností. Odebereme-li z něj kupříkladu čtverec (*dole*), zbyde nám obdélník sice menší, avšak opět zlatý, neboť $\Phi = 1/(\Phi - 1)$ (*naproti nahoře*). Opakováním tohoto procesu dostaneme spirálu složenou ze čtverců, jejíž tvar se podobá mnoha jiným spirálám, které můžeme vypozorovat v přírodě.

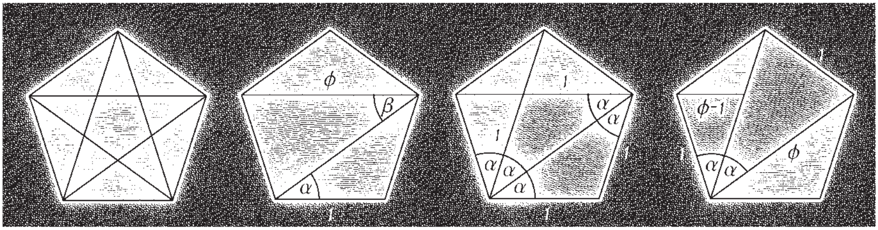
Zanoříme-li do sebe tři zlaté obdélníky pod pravými úhly (*naproti uprostřed*), pak se jejich vrcholy stanou vrcholy pravidelného dvanáctistěnu. K důkazu tohoto pozorování nám stačí ověřit, že všechny trojúhelníky na prostředním obrázku jsou rovnostranné nebo, což je totéž, že každé dvě hrany těchto trojúhelníků mají stejnou délku.

A teď jsme si vydláždili cestičku k nádherné konstrukci pravidelného dvanáctistěnu z osmistěnu (*naproti dole*). Stačí si povšimnout, že každý z dvanácti vrcholů prvního z nich dělí odpovídající hranu toho druhého ve zlatém řezu.

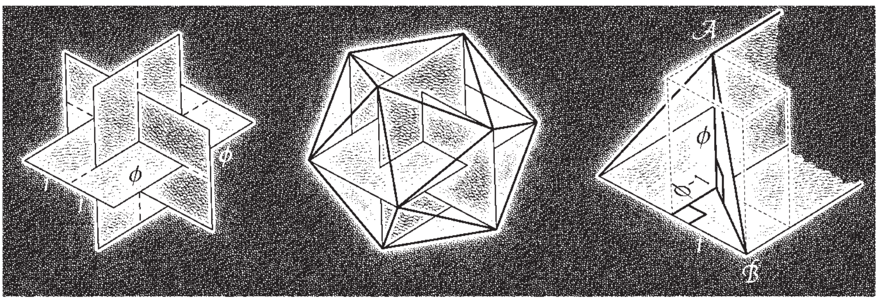




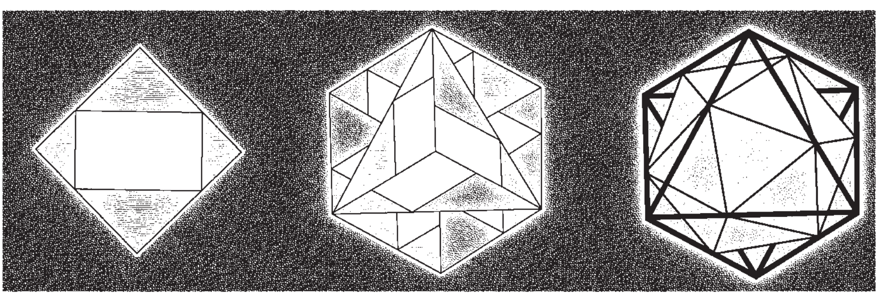




Úhly α a β jsou stejné, proto jsou první dva šedé trojúhelníky shodné a druhé dva podobné. Proto $\Phi/1 = 1/(\Phi - 1)$ čili $\Phi^2 = \Phi + 1$. Řešením rovnice je $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803\ldots$.



Hrana AB má délku $\sqrt{\Phi^2 + (\Phi - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{2(\Phi^2 - \Phi + 1)}$ (dvakrát Pythagoras). Navíc $\Phi^2 = \Phi + 1$ a výraz se tedy rovná 2, délce strany jednoho ze tří zlatých obdélníků.



Zabalme každý ze tří obdélníků do čtverce podle obrázku vlevo. Strany čtverců pak vytvoří osmistěn.

Čísla v přírodě

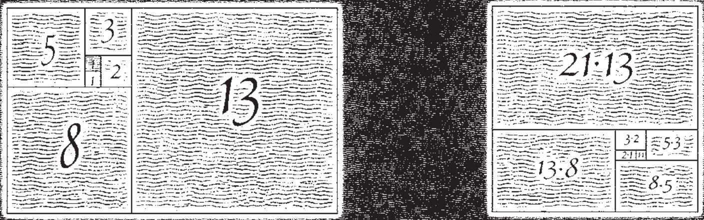
geometrie růstu

Spirála vytvořená ze čtverců kolem jednotkového čtverce (*naproti vlevo nahoře*) se skládá ze čtverců, jejichž strany mají délky rovné Fibonacciho číslům 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., pojmenovaných po Leonardu Fibonaccim (1170–1250). Každé číslo v této posloupnosti je součtem dvou čísel předcházejících, takže například $2 = 1 + 1$; $3 = 1 + 2$; $5 = 2 + 3$ a tak dále.

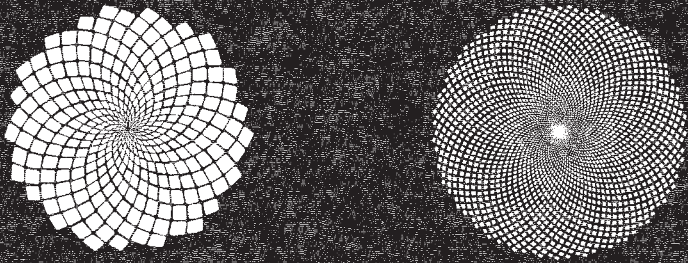
Fibonacciho čísla spojuje velké množství nádherných vlastností. Například dláždění na obrázku vlevo nahoře ukazuje, že $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 = 13 \times (13 + 8) = 13 \times 21$. Obecně platí, že součet kvadrátů prvních n Fibonacciho čísel se rovná součinu n-tého a $(n + 1)$-tého Fibonacciho čísla. Podobně z dláždění na obrázku nahoře vpravo vyplývá rovnost $1{\times}1 + 2{\times}1 + + 3{\times}2 + 5{\times}3 + 8{\times}5 + 13{\times}8 + 21{\times}13 = 21^2$. I tento vztah lze snadno zobecnit.

Fibonacciho čísla se často vyskytují tamtéž, kde potkáváme i zlatý řez Φ (*předchozí kapitola*). Navíc se dá dokázat, že n-té Fibonacciho číslo je přirozené číslo nejbližší hodnotě $\Phi^n/\sqrt{5}$. Odtud vyplývá, že obdélníky, s nimiž se setkáme při výstavbě čtvercové spirály, jsou k nerozeznání od zlatých obdélníků.

Fibonacciho čísla se vyskytují i v mnoha procesech růstu. Například počty spirál vinoucích se po směru či proti směru hodinových ručiček v květu slunečnice (*naproti uprostřed*) jsou zpravidla po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Pascalův trojúhelník (*naproti dole*) také roste, tentokrát ve smyslu prodlužujících se řádků, přičemž součet dvou hodnot ležících vedle sebe na řádku je vždy roven hodnotě ležící na řádku pod nimi. Součet čísel ležících na prvních dvou diagonálách je roven jedné a součet čísel na dvou po sobě jdoucích diagonálách dává součet čísel ležících na diagonále následující. Z tohoto důvodu se i zde nečekaně vynořuje zlatá posloupnost.

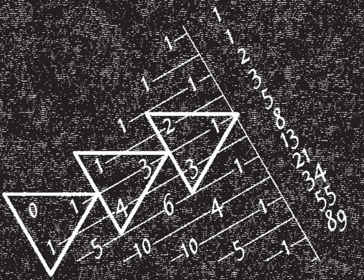


Každý krok tvorby nekonečné spirály ze čtverců dává obdélník, jehož délky stran jsou po sobě jdoucí Fibonacciho čísla (vlevo). Pro liché n lze prvními n obdélníky vydláždit čtverec (vpravo).



Počty spirál po směru či proti směru hodinových ručiček v květu slunečnice jsou (často) po sobě jdoucí Fibonacciho čísla – například 34 a 21 (vlevo) nebo 89 a 55 (vpravo).

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1



Každé číslo na diagonále je součtem dvou čísel z předcházejících dvou diagonál (napravo). Odtud plyne, že součet čísel na dvou po sobě jdoucích diagonálách je roven součtu čísel na diagonále následující.

Eulerova formule

důkaz prořezáváním

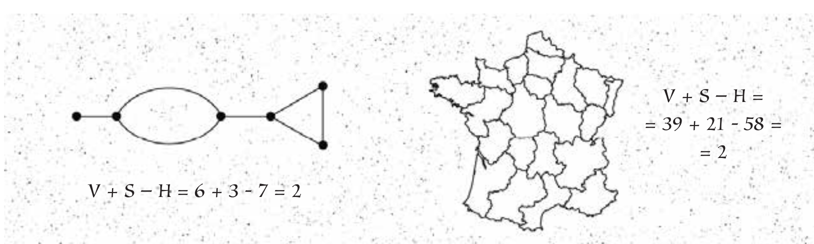
Démantem nazýváme každé konvexní těleso, jehož všechny stěny jsou rovinnými mnohoúhelníky. Leonhard Euler (1707–1783) nalezl nádherný vzorec, který svazuje počty vrcholů, hran a stěn každého takového démantu:

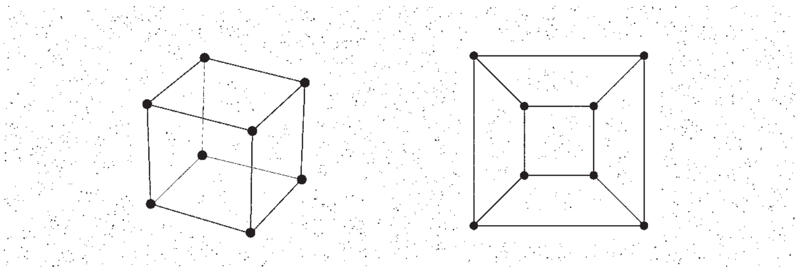
$$V(\text{rcholy}) + S(\text{těny}) - H(\text{rany}) = 2.$$

Například u krychle napočítáme 8 vrcholů, 6 stěn a 12 hran. A vskutku platí $V + S - H = 8 + 6 - 12 = 2$.

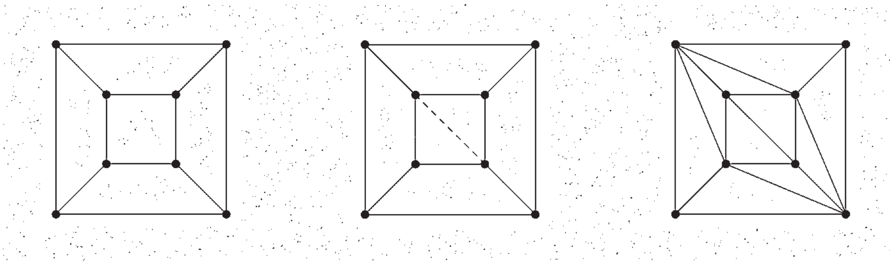
DŮKAZ: Promítneme plášť tělesa do rovinné sítě se stejným uspořádáním vrcholů, hran a stěn (*naproti nahoře*), přičemž vnějšek sítě se počítá jako stěna. Pokud do naší sítě přidáme další úhlopříčku (*naproti, druhý řádek*), hodnota $V + S - H$ se nezmění. Proto budeme přidávat další spojnice, abychom dostali síť složenou výhradně z trojúhelníků ($V + S - H$ zůstalo stejné). Nakonec začneme z okraje sítě ubírat jednu hranu po druhé (*naproti, třetí řádek*), opět beze změny $V + S - H$. Takto pokračujeme, dokud nám nezbude jediný trojúhelník (průmět tělesa o třech vrcholech, dvou stěnách a třech hranách). Nyní tedy zcela jistě platí $V + S - H = 3 + 2 - 3 = 2$, a protože se během celého procesu tato hodnota nezměnila ani jednou, musela se rovnat 2 už na jeho počátku. Q. E. D.

Není těžké dokázat, že Eulerův vzorec platí pro jakoukoli souvislou síť vrcholů a libovolně křivých úseček (*dole*).

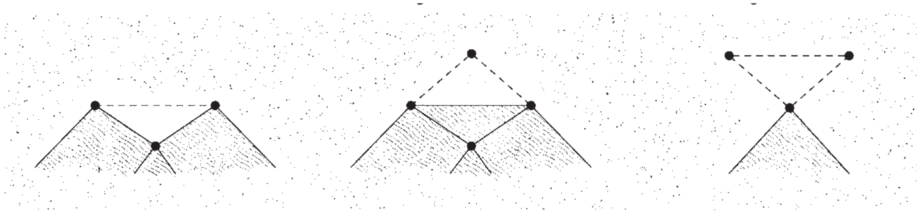




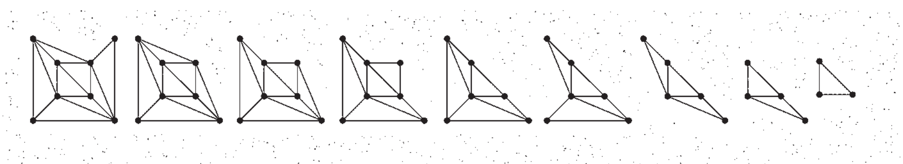
Rozložením pláště krychle dostaneme síť s nezměněnou hodnotou V + S − H.



Přidáme-li do sítě hranu, zvýšíme počet stěn a hran o 1, V + S − H se tedy nemění. Proto je V + S − H pro síť z trojúhelníků stejné, jako bylo pro síť původní.



Prořezávání trojúhelníků zvenčí hodnotu V + S − H nezmění. Například na diagramu vlevo zmizela jedna hrana a jedna stěna a $V + S - H = V + (S + 1) - (H + 1)$.



Po prořezání vidíme, že se V + S − H původního tělesa neliší od této hodnoty pro jediný trojúhelník.

Možné nemožnosti

zdvojení, kvadratura a trisekce

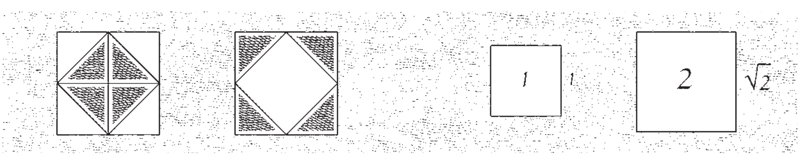
Sokrates (469–399 př. n. l.) jednou použil první dva diagramy (*dole*) ke zdvojení čtverce. Delfská věštkyně nato předpověděla, že pokud by se podařilo zdvojit Apollonův oltář krychlového tvaru, mohlo by to snad zastavit mor.

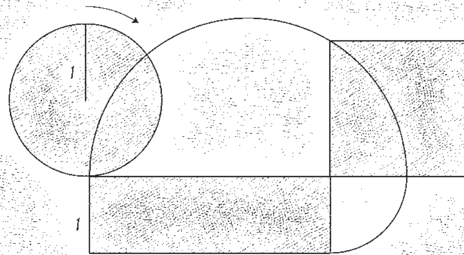
V devatenáctém století bylo dokázáno, že otázka „zdvojení krychle" – podobně jako další dva známé problémy: „kvadratura kruhu" a „trisekce obecného úhlu" – jsou neřešitelné, pokud budeme podobně jako staří Řekové požadovat, aby se při řešení užívalo pouze kružítka a pravítka. Všechny tři problémy ovšem řešitelné jsou, pokud budou povoleny nějaké další pomůcky.

Ke kvadratuře kruhu: koulejme kruh o půl otáčky po vodorovné podložce (*naproti nahoře*). Vznikne dlouhý obdélník se stejným obsahem jako kruh (*strana 25*). Nyní použijeme kružítko a pravítko v souladu s požadavky a vytvoříme s jejich pomocí čtverec o stejném obsahu jako obdélník (*strana 13*).

Archimedes odhalil velmi vynalézavou metodu trisekce úhlu α sevřeného dvěma přímkami (*naproti uprostřed*) s pomocí kružítka a „označeného" pravítka (tedy pravítka se dvěma značkami). Stačí sestrojit kružnici a přiložit pravítko, jak je naznačeno na obrázku. Úhel ε je pak přesně třetinou úhlu α.

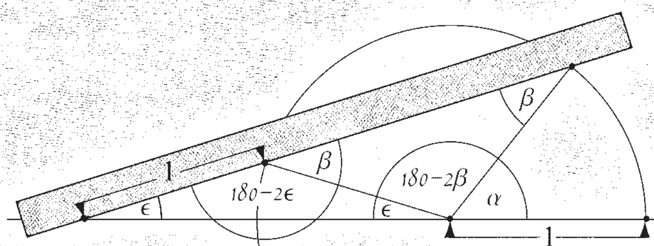
Zdvojení čtverce se redukuje na úlohu sestrojit z 1 hodnotu $\sqrt{2}$ (*dole vpravo*) a ke zdvojení krychle stačí z 1 sestrojit $\sqrt[3]{2}$ (*naproti dole*). Pokud rozdělíme papírový čtverec o straně délky 1 na třetiny a ohneme jej podle návodu na obrázku, dostaneme $\sqrt[3]{2}$. Vcelku snadno se to popisuje, podstatně těžší je však tento fakt dokázat. Zvládnete to?



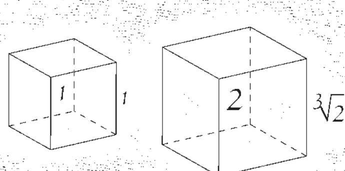


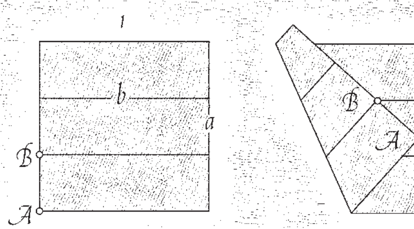
½ × obvod kruhu

obsah kruhu = obsah obdélníku = obsah čtverce



Z levého půlkruhu plyne $\beta = 180 - (180 - 2\varepsilon)$
a z pravého $\alpha = 180 - (\varepsilon + (180 - 2\beta)) = 3\varepsilon$.





Přehneme-li body A a B na úsečky a a b, pak bude A dělit úsečku a v poměru $1 : \sqrt[3]{2}$.

KNIHA II