PRO STŘEDNÍ ŠKOLY

Nová

MATEMATIKA

V KOSTCE

PODLE STÁTNÍ MATURITY

Helena Sixtová

FRAGMENT

Nová matematika v kostce pro SŠ

Vyšlo také v tištěné verzi

Objednat můžete na
www.fragment.cz
www.albatrosmedia.cz

FRAGMENT

Helena Sixtová
Nová matematika v kostce pro SŠ – e-kniha

ALBATROS MEDIA

OBSAH

1. Základy matematické logiky a teorie množin 7

Výroková logika 7

Množiny 11

2. Číselné obory 14

Přirozená čísla 14

Základní operace 15

Dělitelnost 16

Celá čísla 19

Racionální čísla 20

Poměr 23

Procenta 24

Reálná čísla 24

Komplexní čísla 28

Algebraický tvar komplexního čísla 29

Goniometrický tvar komplexního čísla 30

3. Mocniny 33

Mocniny s přirozeným exponentem 33

Mocniny s celočíselným exponentem 33

Mocniny s racionálním exponentem, odmocniny 34

Částečné odmocňování 35

Usměrňování zlomků 35

4. Algebraické výrazy 37

Operace s mnohočleny 38

Rozklad na součin 39

Lomené výrazy 40

5. Rovnice a nerovnice 42

Lineární rovnice 42

Rovnice v součinovém tvaru 43

Kvadratické rovnice 44

Rovnice s neznámou ve jmenovateli 46

Rovnice v podílovém tvaru 47

Rovnice s absolutní hodnotou 48

Vyjádření neznámé ze vzorce 50

Rovnice s parametrem 50

Lineární rovnice s parametrem 50

Kvadratická rovnice s parametrem 51

Rovnice s neznámou pod odmocninou = iracionální rovnice **52**
Soustavy rovnic **53**
Soustava dvou lineárních rovnic 53
Soustava tří a více lineárních rovnic 54
Soustava lineární a kvadratické rovnice 55
Grafické řešení rovnic a jejich soustav **56**
Nerovnice **59**
Lineární nerovnice s jednou neznámou 59
Soustavy lineárních nerovnic 60
Nerovnice v součinovém tvaru 60
Nerovnice v podílovém tvaru 61
Nerovnice s neznámou ve jmenovateli 62
Kvadratická nerovnice 63
Nerovnice s absolutní hodnotou 64
Grafické řešení nerovnic 66
Slovní úlohy vedoucí k řešení rovnic a soustav rovnic **67**
Úlohy na pohyb 68
Geometrická úloha 69
Úlohy na společnou práci 70
Úloha na směsi 71
Logaritmické a exponenciální rovnice **73**
Logaritmus, pravidla pro počítání s logaritmy 73
Exponenciální rovnice 75
Logaritmické rovnice 76
Goniometrické rovnice **78**
6. Funkce 81
Vlastnosti funkcí 82
Lineární funkce **84**
Slovní úlohy na přímou úměrnost 86
Kvadratická funkce **87**
Lineární lomená funkce **91**
Slovní úlohy na nepřímou úměrnost 92
Mocninné funkce **93**
Absolutní hodnota funkce **94**
Exponenciální funkce **96**
Logaritmická funkce **98**
Goniometrické funkce **100**
Oblouková a stupňová míra 100
Orientovaný úhel 100
Jednotková kružnice 101
Vlastnosti goniometrických funkcí 103
Hodnoty goniometrických funkcí 103
Vzorce pro goniometrické funkce 106

7. Geometrie v rovině 111

Značení 111
Bod, přímka, polopřímka, úsečka 112
Metrické vlastnosti v rovině. 112

Úhly 112
Rozdělení úhlů podle velikostí. 113
Rozdělení úhlů podle polohy 113
Středové a obvodové úhly 114

Zobrazení v rovině 114
Shodná zobrazení 115
Podobnost a stejnolehlost. 116

Geometrické útvary v rovině. 119
Trojúhelníky 119
Konvexní čtyřúhelníky 123
Mnohoúhelníky 125
Kružnice, kruh 126

8. Geometrie v prostoru 129

Bod, přímka a rovina v prostoru. 129
Vzájemná poloha přímek v prostoru 129
Vzájemná poloha přímky a roviny 130
Vzájemná poloha dvou rovin 130
Vzájemná poloha tří rovin 131

Metrické vlastnosti útvarů v prostoru 131
Odchylka přímek, kolmost přímek. 131
Kolmost přímky a roviny 132
Kolmost rovin. 132
Odchylka přímek a rovin 132
Vzdálenosti bodů, přímek a rovin 133

Geometrická tělesa 134
Převody jednotek délky, plochy a objemu 136
Mnohostěny 137
Koule a její části 141

9. Analytická geometrie 143

Soustava souřadnic. 143
Souřadnice bodu. 143
Vzdálenost dvou bodů 144

Vektory 145
Operace s vektory. 145

Přímka v rovině 148
Rovnice přímky 148
Vzájemná poloha bodu a přímky v rovině. 153
Vzájemná poloha dvou přímek v rovině 154

Přímka a rovina v prostoru **157**
Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru 158
Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru 158
Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru 159
Kuželosečky **160**
Kružnice 161
Elipsa 163
Hyperbola 165
Parabola 167
Vzájemná poloha přímky a kuželosečky 169

10. Posloupnosti a řady 174

Posloupnosti **174**
Aritmetická posloupnost **175**
Geometrická posloupnost **177**
Užití posloupností při řešení slovních úloh **178**
Užití geometrických posloupností v úlohách na pravidelný růst či pokles 179
Limity posloupností **180**
Nekonečná řada **182**

11. Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika 184

Kombinatorika **184**
Základní kombinatorická pravidla 184
Faktoriál čísla n 185
Výrazy a rovnice s faktoriály 185
Kombinační čísla a jejich vlastnosti 186
Binomická věta 186
Výrazy, rovnice a nerovnice s kombinačními čísly 187
Variace, permutace a kombinace 188
Pravděpodobnost **191**
Statistika **194**
Charakteristiky polohy 196
Charakteristiky variability 197

12. Diferenciální a integrální počet 200

Limita funkce **200**
Derivace funkce **209**
Věty o derivaci funkce 210
Užití derivací 212
Integrál **217**
Neurčitý integrál 217
Určitý integrál a jeho využití 219

Použité a doporučené zdroje a literatura 223

1. ZÁKLADY MATEMATICKÉ LOGIKY A TEORIE MNOŽIN

Výroková logika

Matematická logika pracuje s **výroky**. Výrokem je každá věta, o které můžeme jednoznačně rozhodnout, zda je **pravdivá či nepravdivá**. Pravdu označujeme 1, nepravdu 0. Výroky značíme velkými písmeny.

Příklad ▼

Výrokem je věta: *Teď svítí slunce.*
Výrokem není věta: *Podej mi sůl.*

Výrok, který má opačnou pravdivostní hodnotu než výrok A, nazýváme **negace výroku** A. Negaci značíme nejčastěji $\neg A$, popř. $\bar{A}$, A' či *non* A. Negaci obvykle tvoříme slovy „Není pravda, že A."

A	$\neg A$
1	0
0	1

Příklad ▼

Výrok A	Příklady negace výroku A
Venku prší.	Není pravda, že venku prší. Venku neprší.
Zítra přijde Milan.	Není pravda, že zítra přijde Milan. Milan zítra nepřijde.
Diktát jsem napsal bez chyby.	V diktátu jsem měl aspoň jednu chybu.
Nejvýše jeden příklad jsem vyřešil správně (tedy jeden nebo žádný).	Vyřešil jsem správně nejméně dva příklady.

Jestliže negujeme negaci, dostaneme původní výrok: $\neg(\neg A) = A$.

Složené výroky vytváříme z jednoduchých výroků pomocí **logických spojek**.

Logická spojka	Značka	Význam
Konjunkce	$\wedge$	$A \wedge B$: A platí **zároveň** s B (platí oba výroky **současně**).
Disjunkce	$\vee$	$A \vee B$: platí A **nebo** B (platí aspoň jedna alternativa).
Implikace	$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$: **jestliže** platí A, **pak** platí B.
Ekvivalence	$\Leftrightarrow$	$A \Leftrightarrow B$: A platí **právě tehdy, když** platí B (oboustranná implikace).

V odborné literatuře se konjunkce také nazývá **logický součin** a označuje se A ***AND*** B. Pravdivostní hodnoty se opravdu násobí. Podobně disjunkce se nazývá **logický součet** a označuje se A ***OR*** B. Pravdivostní hodnoty se sčítají s tím, že $1+1 \approx 1$.

Jakou pravdivostní hodnotu mají základní složené výroky, uvádí následující **tabulka pravdivostních hodnot**:

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Příklad ▾

Následující věty zapíšeme pomocí logických spojek a výroků A a B.

A: Po obědě si dám dort. B: Po obědě si dám zmrzlinu.

- Po obědě si dám dort a zmrzlinu. Konjunkce $A \wedge B$.
- Po obědě si nedám dort a dám si zmrzlinu. Konjunkce $\neg A \wedge B$.
- Po obědě si dám dort nebo zmrzlinu. Disjunkce $A \vee B$.
- Pokud si dám dort, nedám si zmrzlinu. Implikace $A \Rightarrow \neg B$.
- Dám si právě jeden zákusek. To znamená, že si dám buď dort a ne zmrzlinu, nebo si nedám dort, jen zmrzlinu. $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Výroková formule je výraz tvořený více výroky, závorkami, symboly pro negaci a symboly pro logické spojky. Pro posouzení pravdivosti složeného výroku můžeme použít tabulku pravdivostních hodnot.

Příklad ▼

Sestavte pravdivostní tabulku pro výrokovou formuli $(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B$.

A	B	C	$\neg C$	$A \wedge \neg C$	$\neg B$	$(A \wedge \neg C) \Rightarrow \neg B$
1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1

Pokud by se v posledním sloupci vyskytovaly pouze jedničky, daná výroková formule by byla tautologií. **Tautologií** nazýváme každou výrokovou formuli, která pro všechny hodnoty proměnných nabývá hodnot pravda čili 1. Naopak formuli, která nabývá vždy hodnoty nepravda čili 0, nazýváme **kontradikcí**.

Negace složených výroků se provádí podle těchto pravidel, která vycházejí z pravdivostních hodnot:

$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ … Výroky neplatí současně, takže neplatí buď jeden nebo neplatí druhý.

$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$ … Neplatí ani ten ani onen, neplatí tedy ani jeden výrok.

$\neg (A \Rightarrow B) = A \wedge \neg B$

$\neg (A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) = (A \Leftrightarrow \neg B) = (\neg A \Leftrightarrow B)$

Pro vyjádření údaje o počtu (tzv. kvantifikaci) užíváme **kvantifikátory**. Nejčastěji obecný a existenční. **Obecný kvantifikátor** značíme $\forall$ a čteme „každý, všechny, libovolný“. **Existenční kvantifikátor** značíme $\exists$ a čteme „existuje aspoň jeden“ prvek s danou vlastností.

Příklad ▼

Každé číslo dělitelné dvěma je sudé.
Existuje alespoň jedno sudé prvočíslo.

Negace kvantifikovaných výroků se provádí negací výrokové formy a zaměněním kvantifikátoru obecného za existenční a naopak.

Výrok	Negace
Každý … je …	Existuje aspoň jeden …, který není …
Existuje aspoň jeden …, který je …	Pro každý … platí, že není …
Negace	Výrok

Příklad ▼

Výrok: Všechny dveře v domě jsou dřevěné.
Negace: Aspoň jedny dveře v domě nejsou dřevěné.
Pozor, negací není výrok: Žádné dveře nejsou dřevěné.

K procvičení

1. Rozhodněte, zda mezi uvedenými výroky platí implikace či ekvivalence:
   a) Trojúhelník je pravoúhlý. Vnitřní úhel trojúhelníku je 90°.
   b) Trojúhelník je rovnostranný. Každý vnitřní úhel trojúhelníku je 60°.
   c) Trojúhelník je rovnostranný. Vnitřní úhel trojúhelníku je 60°.
2. Negujte výroky:
   a) Všichni žáci v této třídě jsou chlapci.
   b) Přijdu zítra nebo pozítří.
   c) Existuje aspoň jeden dokonalý člověk.
3. Sestavte tabulku pravdivostních hodnot pro výrokovou formuli: $(A \vee \neg B) \Rightarrow C$.
4. Ověřte pomocí tabulky pravdivostních hodnot, zda platí: $\neg (A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

Výsledky

1. a) ekvivalence b) ekvivalence c) implikace
2. a) Aspoň jeden žák v této třídě není chlapec. Nebo také: Ve třídě je aspoň jedna dívka.
   b) Nepřijdu zítra a nepřijdu pozítří. Běžně: Nepřijdu zítra ani pozítří.
   c) Všichni lidé jsou nedokonalí. Běžně: Nikdo není dokonalý.
3.

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \Rightarrow C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

4.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
1	1	0	0	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	1	1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	0	1	1	1	**0**	0	0	**0**

Ano, výrok je pravdivý. Pravdivostní hodnoty výroku na levé straně jsou stejné jako hodnoty výroku na pravé straně.

Množiny

Množina je soubor předmětů, které mají nějakou společnou vlastnost, podle které můžeme rozhodnout, zda do dané množiny patří či nepatří. Jednotlivé předměty nazýváme **prvky** množiny. Množiny označujeme velkými písmeny, prvky označujeme malými písmeny.
Zápis $x \in A$ čteme „x je prvkem množiny A“, zápis $y \notin A$ čteme „y není prvkem množiny A“.

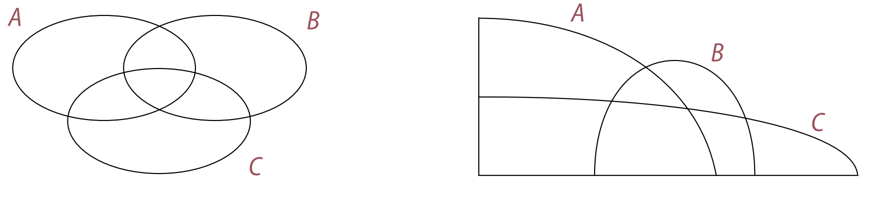
Množinu můžeme určit třemi způsoby:
a) **výčtem** – uvedením všech jejích prvků
b) uvedením **charakteristické vlastnosti**, kterou mají právě prvky dané množiny a kterou kromě nich už žádný další prvek nemá
c) **graficky** – znázorněním v diagramu

Příklad ▼

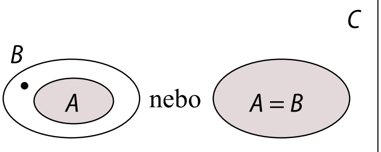
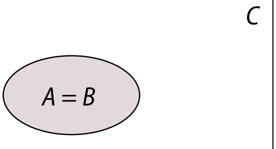
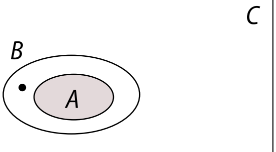
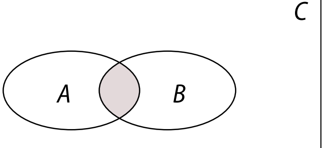
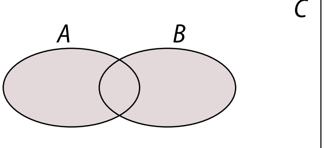
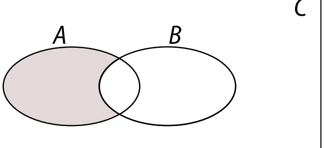
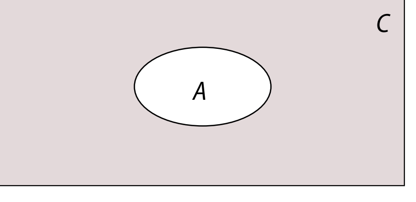
Množinu A, která obsahuje všechny měkké souhlásky (popisujeme vlastnost), tak můžeme výčtem zapsat A = {ž; š; č; ř; c; j; ď; ť; ň}.

Množina, která neobsahuje žádný prvek, je **prázdná** a značíme ji $A = \emptyset$ nebo $A = \{\}$.
Konečná množina obsahuje konečný počet prvků. **Nekonečná** množina nemá konečný počet prvků.
Pro znázornění množin a operací s nimi používáme množinové diagramy, nejčastěji **Vennovy diagramy**. Množiny jsou v nich znázorněny pomocí uzavřených čar.

Příklad ▼

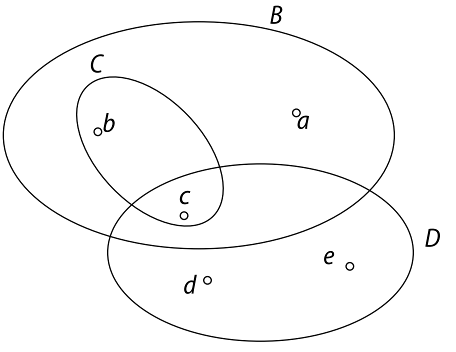


Množinové operace

Operace a zápis	Definice	Znázornění
Inkluze $A \subseteq B$	$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in C; x \in A \Rightarrow x \in B)$ A je **podmnožinou** B právě tehdy, když každý prvek množiny A je zároveň prvkem množiny B.	
Rovnost $A = B$	$A = B \Leftrightarrow (\forall x \in C; x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ Množiny A a B jsou si rovny, právě když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a naopak.	
Ostrá inkluze $A \subset B$	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \neq B)$ A je **vlastní podmnožinou** B, jestliže A je podmnožinou B a množiny A a B si nejsou rovny.	
Průnik $A \cap B$	$A \cap B \Leftrightarrow (\forall x \in C; x \in A \wedge x \in B)$ Průnik množin A a B tvoří všechny prvky, které patří současně do obou těchto množin.	
Sjednocení $A \cup B$	$A \cup B \Leftrightarrow (\forall x \in C; x \in A \vee x \in B)$ Sjednocení množin A a B tvoří všechny prvky, které patří aspoň do jedné z těchto množin.	
Rozdíl $A - B$	$A - B \Leftrightarrow (\forall x \in C; x \in A \wedge x \notin B)$ Rozdíl množin A a B tvoří prvky, které patří pouze do množiny A, ale nepatří do množiny B.	
Doplněk A'_C	$A'_C = \{x \in C; x \notin A\}$ Doplněk množiny A na množině C tvoří prvky, které patří do množiny C, ale nepatří do množiny A.	

Příklad ▼

Jsou dány množiny B, C a D.
$B = \{a; b; c\}$
$C = \{b; c\}$
$D = \{c; d; e\}$



Pro množiny B, C, D platí:
$B - C = \{a\}$
$B \cap C = \{b; c\} = C$
$B \cup C = \{a; b; c\} = B$
$C \subseteq B$
$C \subset B$
$B \cap D = \{c\}$
$D \cup C = \{b; c; d; e\}$

K procvičení

Jsou dány množiny A, B, C. Jaké prvky tvoří množiny $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$, $A - C$, B'_A?
$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
$B = \{3; 4; 5; 6\}$
$C = \{5; 6; 7; 8; 9\}$

Výsledky

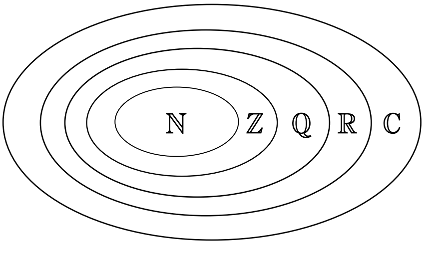
$A \cup C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$B \cup C = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
$A \cap B = \{3; 4; 5; 6\}$
$B \cap C = \{5; 6\}$
$A - C = \{1; 2; 3; 4\}$
$\mathrm{B}'_A = \{1; 2; 7; 8\}$

2. ČÍSELNÉ OBORY

Číselné obory jsou množiny různých druhů čísel, pro která definujeme operace sčítání a násobení.

Množina (obor)	Značení	Příklad	Poznámka
Přirozená čísla	$\mathbb{N}$	1; 2; 3; 4	Vyjadřují počty osob, věcí, zvířat.
Celá čísla	$\mathbb{Z}$	−2; −1; 0; 1; 2; 3	Vyjadřují přírůstky a úbytky v počtech osob, věcí, zvířat.
Racionální čísla	$\mathbb{Q}$	$-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 0{,}1; \frac{3}{8}; 1{,}\overline{3}; 8; 95$	Vyjadřují díly a změny počtu dílů; můžeme je zapsat zlomkem, vyjádřit číslem s ukončeným či periodickým desetinným rozvojem.
Reálná čísla	$\mathbb{R}$	$\sqrt{3}; -1; 0; 1; \pi; 2{,}25; 58{,}4$	Vyjadřují výsledky měření; jejich obrazy vyplní celou číselnou osu.
Komplexní čísla	$\mathbb{C}$	$2 - 3i; -5 + i; -5i$	Jejich obrazy vyplní celou rovinu (Gaussovu rovinu).

Pro uvedené číselné obory platí vztah $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, jak je znázorněno i v obrázku. V praxi se dále používají rozšířené či zúžené číselné obory, např.:



$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} + \{0\}$ … přirozená čísla s nulou
$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z}; x < 0\}$ … celá záporná čísla
$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ … kladná reálná čísla
$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$ … nezáporná reálná čísla

Rozdíl množin $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nazýváme iracionální čísla.

Přirozená čísla

Jedná se o čísla, která vyjadřují nenulový počet prvků. Přirozená čísla zapisujeme číslicemi (ciframi). Rozlišujeme pojmy čísla a číslice. **Čísel** je nekonečně mnoho, **číslice** jsou grafickými symboly pro zápis čísel. Nejčastěji užíváme **10 arabských číslic**, tedy 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Kromě arabských číslic užíváme i římské číslice např. pro označení kapitol v knize, měsíců či letopočtů.

Římské číslice

Znak	I	V	X	L	C	D	M
Číslo	1	5	10	50	100	500	1000

Pro zápis čísel pomocí těchto znaků se vžila pravidla, která se mohou mírně lišit od původního zápisu starými Římany, vznikají tak výjimky uvedené níže.
Užívaná pravidla pro zápis římských čísel:

1. Čísla se skládají od znaků pro nejvyšší hodnoty po znaky pro nejnižší hodnoty.
2. Následuje-li znak pro nižší hodnotu za znakem pro vyšší hodnotu, pak se hodnoty sčítají. To platí i pro znaky stejných hodnot; př. CLV = 100 + 50 + 5 = 155, XXX = 10 + 10 + 10 = 30. Znaky I, X, C se vedle sebe obvykle píší nejvýše třikrát. Znaky V, L, D se za sebe řadí pouze jednou.
3. Předchází-li znak pro nižší hodnotu znaku pro vyšší hodnotu, pak se nižší hodnota odčítá od vyšší; tj. IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400, CM = 900. Toto pravidlo můžeme použít pouze k odčítání znaku od nejbližších dvou vyšších, jak je uvedeno v příkladu.

Na starých slunečních hodinách je možno vidět číslo 4 zapsané znaky IIII, jak to užívali ve starém Římě. Římané neužívali pravidlo pro odečítání, to se ujalo až ve středověku, kdy se používala vyšší čísla a bylo třeba zápis zkrátit.

Číslo 999 by Římané zapsali na základě sčítacího pravidla DCCCCLXXXXVIIII, ve středověku (i v současnosti) číslo 999 zapíšeme s využitím odčítacího pravidla CMXCIX. Rozhodně však číslo 999 nemůžeme zapsat IM.

Základní operace

Základní operace v oboru přirozených čísel jsou sčítání a násobení. Výsledky odčítání a dělení již nemusí patřit do množiny přirozených čísel. Říkáme, že $\mathbb{N}$ je uzavřená vzhledem k operaci sčítání a násobení, tedy součet $a + b \in \mathbb{N}$ a součin $a \cdot b \in \mathbb{N}$ pro každé $a, b \in \mathbb{N}$.

sčítanec + sčítanec = součet

činitel · činitel = součin

Pro $a, b, c \in \mathbb{N}$ platí:

$a + (b + c) = (a + b) + c$	Sčítání je **asociativní**, tzn. že sčítance můžeme libovolně sdružovat.
$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	Násobení je asociativní, tzn. že činitele můžeme libovolně sdružovat.
$a + b = b + a$	Sčítání je **komutativní**, tzn. že pořadí sčítanců můžeme zaměnit.
$a \cdot b = b \cdot a$	Násobení je komutativní, tzn. že pořadí činitelů můžeme zaměnit.
$a \cdot 1 = a$	Jednička je **neutrálním prvkem** vzhledem k násobení.
$a\,(b + c) = ab + ac$	Násobení je vzhledem ke sčítání **distributivní**.

Příklad ▼

$28 + 35 + 32 + 65 = (28 + 32) + (35 + 65)= 60 + 100 = 160$
$2 \cdot 28 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot 28 = 10 \cdot 28 = 280$
$3 \cdot (5 + 12) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 12$

Další početní operace můžeme definovat pomocí operací sčítání a násobení. Výsledky těchto definovaných operací již nemusí být přirozená čísla.

Rozdíl $a - b$ dvou přirozených čísel a, b je takové číslo x, pro které platí $a = b + x$.
Číslo x je přirozené právě tehdy, když $a > b$.

rozdíl = menšenec – menšitel

Podíl $a : b$ dvou přirozených čísel a, b je takové číslo x, pro které platí $a = b \cdot x$.
Číslo x je přirozené právě tehdy, když a je dělitelné číslem b.

podíl = dělenec : dělitel

Mocnina a^b dvou přirozených čísel a, b je takové přirozené číslo, které je součinem b činitelů s hodnotou a.

mocnina = mocněnec$^{\text{mocnitel}}$ = základ$^{\text{exponent}}$

Dělitelnost

Číslo b je **dělitelem** čísla a právě tehdy, když existuje přirozené číslo k, pro které platí $a = k \cdot b$.
To znamená, že výsledkem dělení $a : b$ je přirozené číslo k. Číslo a je pak **násobkem** čísla b.

Příklad ▼

$18 : 6 = 3$ Číslo 6 je dělitelem čísla 18, číslo 18 je trojnásobkem čísla 6.

Ciferný součet čísla je součet číslic (cifer) v jeho zápisu v desítkové soustavě. Ciferný součet čísla 28056 je 21 (= 2 + 8 + 0 + 5 + 6).

Pravidla dělitelnosti

Dělitel	Pravidlo
2	Na místě jednotek je číslice 0, 2, 4, 6, 8.
3	Ciferný součet je dělitelný třemi.
4	Poslední dvojčíslí je dělitelné čtyřmi.
5	Na místě jednotek je číslice 0 nebo 5.
6	Je dělitelné současně dvěma i třemi.

8	Poslední trojčíslí je dělitelné osmi.
9	Ciferný součet je dělitelný devíti.
10	Na místě jednotek je číslice 0.

Pozn. Existuje i několik pravidel dělitelnosti 7, jsou však složitá a rychlejší je zkusit vydělit číslo sedmi přímo.

Příklad ▼

Najděte všechny dělitele čísla 60. Využijeme pravidla dělitelnosti.

60	1	2	3	4	5	6
	60	30	20	15	12	10

Děliteli čísla 60 jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 a 60.

Pokud má číslo právě dva různé dělitele, a to jedničku a samo sebe, nazýváme ho **prvočíslo**.

Prvočísla: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, …

Ostatní přirozená čísla, která mají aspoň tři různé dělitele, nazýváme čísla **složená**. Jedničku neřadíme ani mezi prvočísla, ani mezi čísla složená. Nejmenším prvočíslem je tedy číslo 2, současně je jediným sudým prvočíslem. Složená čísla můžeme rozložit na součin prvočísel právě jedním způsobem (základní věta aritmetiky), mluvíme o **prvočíselném rozkladu** čísla.

Příklad ▼

Prvočíselný rozklad čísla $36 = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$, i když půjdeme nejprve cestou $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$, dojdeme ke stejnému rozkladu.
Prvočíselný rozklad čísla $60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

Společný dělitel čísel *a, b* je číslo, které dělí obě tato čísla beze zbytku. Čísla se stejným dělitelem větším než 1 nazýváme **soudělná**. Pokud čísla nemají jiného společného dělitele než číslo 1, nazýváme je **nesoudělná**.

Společný násobek čísel *a, b* je číslo, které je násobkem obou čísel *a* a *b*.

Příklad ▼

Najděte společné dělitele čísel 36 a 60.
Děliteli čísla 36 jsou čísla 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.
Děliteli čísla 60 jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 a 60.
Společnými děliteli jsou čísla 1, 2, 3, 4, 6, 12. Největším společným dělitelem je číslo 12.

Největším společným dělitelem čísel a, b je největší číslo, které je dělitelem obou čísel. Zapisujeme $D(a, b)$. Pokud jsou tedy čísla a, b soudělná, platí $D(a, b) > 1$. Pro nesoudělná čísla a, b pak platí $D(a, b) = 1$.

Příklad ▼

$D(36, 60) = 12$

Nejmenší společný násobek čísel a, b je nejmenší přirozené číslo, které je násobkem obou čísel. Značíme $n(a, b)$.

Při hledání $D(a, b)$ a $n(a, b)$ využijeme prvočíselný rozklad a množinové operace. Rozložíme obě čísla na součin prvočísel. Pokud vynásobíme všechny činitele, které patří do průniku obou rozkladů, dostaneme největší společný dělitel.
Pokud vynásobíme všechny činitele, které patří do sjednocení obou rozkladů, dostaneme nejmenší společný násobek.
Můžeme také využít, že platí

$$a \cdot b = D(a, b) \cdot n(a, b).$$

Příklad ▼

Najděte největší společný dělitel a nejmenší společný násobek čísel 240 a 640.
$240 = 3 \cdot 80 = 3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$
$640 = 64 \cdot 10 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
$D(240, 640) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 80$
$n(240, 640) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1920$

Kontrola: $D(240, 640) \cdot n(240, 640) = 80 \cdot 1920 = 153\,600 = 240 \cdot 640$

Euklidův algoritmus je jiný způsob, jak zjistit největší společný dělitel dvou čísel. Může mít formu tabulky (dvou sloupců), kdy menší z čísel opíšeme na následující řádek a pod větší číslo napíšeme rozdíl obou čísel. Ve chvíli, kdy se na řádku obě čísla rovnají, jedná se největší společný dělitel.

240	640
240	640 – 240 = 400
240	400 – 240 = 160
240 – 160 = 80	160
80	160 – 80 = 80

$D(240, 640) = 80$

K procvičení

1. Zapište římskými číslicemi čísla:
   a) 564
   b) 297
   c) 2019
2. Najděte všechny dělitele čísla 84.
3. Doplňte cifru a tak, aby číslo 124 9a4 bylo dělitelné čtyřmi. Najděte všechny možnosti. Která z těchto čísel jsou dělitelná i třemi?
4. Vyjádřete prvočíselným rozkladem čísla:
   a) 144
   b) 1260
   c) 720
5. Najděte největší společné dělitele a nejmenší společné násobky:
   a) $D\ (24, 36)$, $n\ (24, 36)$
   b) $D\ (90, 135)$, $n\ (90, 135)$

Výsledky

1. a) DLXIV; b) CCXCVII; c) MMXIX
2. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42, 84
3. $a \in \{0; 2; 4; 6; 8\}$; 124 944
4. a) $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$
   b) $1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
   c) $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$
5. a) $D\ (24, 36) = 12$, $n\ (24, 36) = 72$; b) $D\ (90, 135) = 45$, $n\ (90, 135) = 270$

Celá čísla

Obor přirozených čísel není uzavřený pro operaci odčítání, to znamená, že výsledkem odčítání dvou přirozených čísel nemusí být přirozené číslo. Proto obor přirozených čísel rozšíříme o nulu a čísla opačná k přirozeným číslům. Všechna tato čísla tvoří množinu celých čísel označenou $\mathbb{Z}$.

Opačné číslo k číslu a značíme $-a$ a platí, že jejich součet je roven nule: $a + (-a) = 0$.

Příklad ▼

a	$-a$
3	−3
−8	8

Množina celých čísel je uzavřena vzhledem k operacím sčítání, odčítání a násobení.

Pravidla pro počítání s celými čísly:

$-(-a) = a$ $\qquad$ $(-a) \cdot (-b) = ab$

$-(a + b) = -a - b$ $\qquad$ $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -ab$

$a + (-b) = a - b$ $\qquad$ $a - (-b) = a + b$

Příklad ▼

$$(-8) \cdot [3 - (-6)] = (-8) \cdot [3 + 6] = (-8) \cdot 9 = -8 \cdot 9 = -72$$

Sudá čísla jsou čísla, jejichž dělitelem je číslo 2. Libovolné **sudé číslo** můžeme tedy vyjádřit ve tvaru $2k$, kde k $\in \mathbb{Z}$. Libovolné **liché číslo** pak můžeme vyjádřit obdobně jako $2k - 1$, popř. $2k + 1$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Racionální čísla

Množina přirozených ani celých čísel není uzavřena vůči operaci dělení, proto zavedeme množinu racionálních čísel. Značíme ji $\mathbb{Q}$.

Racionální číslo lze vyjádřit zlomkem $\frac{p}{q}$, kde **čitatel** $p \in \mathbb{Z}$ a **jmenovatel** $q \in \mathbb{N}$.

Racionální číslo můžeme také vyjádřit desetinným číslem s konečným desetinným rozvojem nebo nekonečným periodickým desetinným rozvojem. Číslo zapsané konečným **desetinným (dekadickým) rozvojem** má tvar

$\frac{p}{q} = \pm\left(n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots + \frac{n_n}{10^n}\right)$, kde $n_0 \in \mathbb{N}_0$ a n_i pro $i \in \{1, 2, \ldots n\}$, jsou cifry od 0 do 9.

Zkráceně tento desetinný rozvoj píšeme ve tvaru $\pm\, n_0,\, n_1\, n_2\, n_3 \ldots n_n$

celá část $\quad$ desetinná čárka $\quad$ desetiny $\quad$ setiny $\quad$ tisíciny

Příklady racionálních čísel: 3,456; $\frac{15}{4}$; $-\frac{3}{10}$; $-0{,}3$; $-8{,}205$; $2{,}666666\ldots = 2{,}\overline{6}$

$$\frac{432}{125} = 3{,}456 = 3 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{6}{1000} = 3 + \frac{4}{10^1} + \frac{5}{10^2} + \frac{6}{10^3}$$

$$-\frac{33}{4} = -8{,}25 = -\left(8 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}\right) = -\left(8 + \frac{2}{10^1} + \frac{5}{10^2}\right)$$

Opakující se skupinu čísel v desetinném rozvoji nazýváme **perioda** (píšeme nad ni vodorovnou čáru), číslu za desetinnou čárkou před periodou říkáme **předperioda**.

Číslo	Perioda	Předperioda
$0{,}0232323\ldots = 0{,}0\overline{23}$	23	0
$15{,}456456456\ldots = 15{,}\overline{456}$	456	není

Operace se zlomky

Operace	Definice	Příklad
Rozšiřování – násobení čitatele i jmenovatele stejným nenulovým číslem	$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}$	$\frac{3}{4}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}=\frac{6}{8}$
Krácení – dělení čitatele i jmenovatele stejným nenulovým číslem	$\frac{a}{b}=\frac{a:k}{b:k}$	$\frac{25}{15}=\frac{25:5}{15:5}=\frac{5}{3}$
Převrácené číslo (také převrácená hodnota čísla) – záměna čitatele a jmenovatele	K číslu $\frac{a}{b}$ je převrácené číslo $\frac{b}{a}$.	K číslu $\frac{2}{3}$ je převrácené číslo $\frac{3}{2}$.
Násobení – násobíme čitatel čitatelem a jmenovatel jmenovatelem	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{3\cdot 4}{5\cdot 7}=\frac{12}{35}$
Dělení – dělit zlomkem znamená násobit jeho převrácenou hodnotou	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	$\frac{5}{4}:\frac{11}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{11}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 11}=\frac{15}{44}$
Sčítání – při stejných jmenovatelích sečteme čitatele, při různých jmenovatelích nejprve převedeme na společného jmenovatele (nejlépe na nejmenší společný násobek obou jmenovatelů)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$ $\frac{4}{3}+\frac{5}{7}=\frac{4\cdot 7+5\cdot 3}{3\cdot 7}=$ $=\frac{28+15}{21}=\frac{43}{21}$
Odčítání – při stejných jmenovatelích odečteme čitatele, při různých jmenovatelích nejprve převedeme na společného jmenovatele (nejlépe na nejmenší společný násobek obou jmenovatelů)	$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-c\cdot b}{b\cdot d}$	$\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3-2\cdot 2}{2\cdot 3}=\frac{3-4}{6}=$ $=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$
Složený zlomek – chápeme jako podíl dvou zlomků; součin vnějších členů dělíme součinem vnitřních členů	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=$ $=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{5}{3}:\frac{4}{9}=\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{4}=\frac{5\cdot 9}{3\cdot 4}=$ $=\frac{45}{12}=\frac{15}{4}$

Při **porovnávání dvou racionálních čísel** $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ můžeme postupovat dvěma způsoby:

1. Po převedení na společného jmenovatele porovnáme čitatele.
2. Využijeme pravidlo $\frac{p}{q} > \frac{r}{s} \Leftrightarrow p \cdot s > r \cdot q$, pro $s, q \in \mathbb{N}$.

Při zápisu racionálních čísel někdy užíváme **čísla smíšená**, která mají celou část a zbytek je vyjádřen zlomkem.

Příklad ▼

$$3\frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 1}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\frac{29}{6} = \frac{24+5}{6} = \frac{4 \cdot 6 + 5}{6} = \frac{4 \cdot 6}{6} + \frac{5}{6} = 4\frac{5}{6} \quad \text{… čteme čtyři a pět šestin}$$

$$1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{\frac{4+1}{2}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{2}{5}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{2}{5}} =$$
$$= 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5+2}{5}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} = 1 + \frac{5}{14} = 1\frac{5}{14}$$

Pořadí početních operací:
1. umocňování, odmocňování
2. násobení, dělení
3. sčítání, odčítání
   Přednostně řešíme operace uvedené v závorce.

Příklad ▼

$$(-2) - [5 - 2 \cdot (7 - 9)^2\,] = -2 - [5 - 2 \cdot (-2)^2] = -2 - [5 - 2 \cdot\ 4] = -2 - (-3) =$$
$$= -2 + 3 = 1$$

K procvičení

1. Zapište zkráceným zápisem číslo s využitím desetinného rozvoje:
   a) $2 \cdot 10 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 0{,}1 + 7 \cdot 0{,}001$
   b) $-8 \cdot 10 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 0{,}1 - 2 \cdot 0{,}01$

2. Vypočítejte bez kalkulačky s ohledem na pořadí početních operací:
   a) $(-4) \cdot [(4-5) \cdot (-1 + 4) + 2] - 2$
   b) $(-40) : (6 - 14) - (-49) : (-7)$
   c) $(-2) \cdot 7 - (-3) \cdot 9 - (-4) \cdot 30 - 42 + 3 \cdot (-2 + 3) - \{-2 + 5 - [14 - 25]\}$
3. Zapište a vypočítejte:
   a) součin součtu a podílu čísel –55 a 5.
   b) podíl rozdílu čísel a součtu čísel –25 a 15.
4. Vypočítejte:
   a) $\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{4}:\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\right)$; c) $1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}$

Výsledky

1. a) 23,507; b) −84,32
2. a) 2; b) −2; c) 80
3. a) 550; b) 4
4. a) $\frac{65}{44}$; b) $\frac{11}{24}$; c) 0

Poměr

Poměr je podíl dvou hodnot ve stejných jednotkách. Porovnáváme tak dvě čísla nebo dvě veličiny téhož druhu. S poměrem pracujeme jako se zlomkem, můžeme ho krátit či rozšiřovat. **Měřítko plánu** vyjadřuje poměr údaje v nákresu a skutečné délky vyjádřené ve stejných jednotkách. Měřítko mapy 1 : 5000 tak udává, že 1 cm na mapě představuje 5000 cm ve skutečnosti, tedy 50 m.

Příklad ▼

Rozdělte 0,5 t v poměru 12 : 13.
Převedeme na 500 kg, celkem dělíme na 12 + 13 = 25 dílů.
Každý má velikost 500 : 25 = 20 kg.
Materiál tedy rozdělíme na 240 kg (12 dílů) a 260 kg (13 dílů).

Příklad ▼

Určete měřítko mapy, na které šest centimetrů představuje 1,5 kilometru ve skutečnosti.
Převedeme na stejné jednotky a obě hodnoty dáme do poměru, který upravujeme.
6 cm : 150 000 cm
1 cm : 25 000 cm, měřítko mapy je tedy 1 : 25 000.

Procenta

Celek označujeme jako základ z. Jedno procento (%) představuje jednu setinu celku. Počet procent p udává, kolik setin základu přísluší procentové části. Procentová část $č$ je číslo, které vyjadřuje část základu. Platí:

$$č = \frac{p}{100} \cdot z$$

Nebo při výpočtu využijeme přímou či nepřímou úměrnost (viz kapitola Funkce).

Pozor! Procento je setina celku, je třeba vždy sledovat, z jakého celku daná procenta počítáme.

Příklad ▼

V obchodě s obuví zákaznice zakoupila pár bot s aktuální letákovou 40% slevou.
U pokladny po předložení věrnostní karty byla ještě započtena věrnostní sleva 30 %.
Jakou celkovou slevu v procentech zákaznice využila?
Původní cena je označena x. Představuje základ 100 %.
Započítáme první slevu 40 %. Nová cena je 60 % původní ceny, tedy $0{,}6x$.
To je nový základ pro další slevu.
Další sleva 30 % z ceny $0{,}6x$ je $0{,}3 \cdot 0{,}6x = 0{,}18x$. Tedy další sleva je ve skutečnosti 18% slevou z původní ceny x.
Celková sleva tak činí 40 % + 18 % = 58 % z původní ceny.

K procvičení

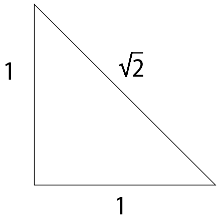
1. Rozdělte číslo 240 v poměru 5 : 7.
2. Po návratu z výletu jsme přeměřili trasu. Na mapě jsme naměřili 35 cm. Jakou vzdálenost jsme urazili, jestliže mapa má měřítko 1 : 50 000?
3. Cena výrobku se nejprve snížila o 30 % a později zase zvýšila o 30 % z nové ceny. Rozhodněte, zda je konečná cena stejná, nižší či vyšší než počáteční. Zdůvodněte.

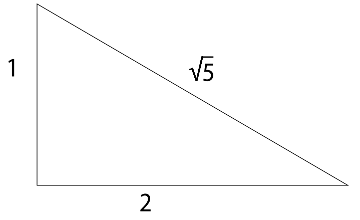
Výsledky

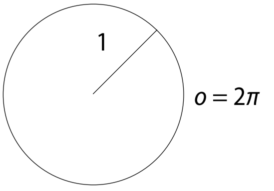
1. 100 : 140
2. 17,5 km
3. Cena po dvou přeceněních je nižší o 9 %. Po první změně byla cena 70 % z té původní, k tomu se přidalo 30 % ze snížené ceny, což je 91 % ($0{,}7 \cdot 1{,}3=0{,}91$) vůči původní ceně.

Reálná čísla

V oboru racionálních čísel můžeme bez omezení sčítat, odčítat, násobit, dělit nenulovým číslem i umocňovat přirozeným mocnitelem. V oboru racionálních čísel však nelze bez omezení odmocňovat kladná čísla. Některé údaje (např. sin 60°) či délky úseček ($\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\pi$) nelze vyjádřit zlomkem. Množinu racionálních čísel proto rozšíříme na množinu reálných čísel, kterou značíme $\mathbb{R}$.







Reálná čísla zahrnují délky libovolných úseček, čísla k nim opačná a nulu. Obor reálných čísel je tvořen racionálními čísly vyjádřitelnými zlomkem a iracionálními čísly (nepodílovými), která jsou vyjádřena nekonečným (neukončeným) neperiodickým desetinným rozvojem.
Při praktických výpočtech s reálnými čísly obvykle počítáme se zaokrouhlenými hodnotami podle pravidel zaokrouhlování. Zaokrouhlení čísla na jednotku daného řádu provedeme tak, že:

- Všechny číslice vpravo od číslice daného řádu nahradíme nulami.
- Jestliže první z vynechaných cifer je menší než 5, všechny ponechané číslice zůstanou beze změny.
- Jestliže první z vynechaných cifer je větší nebo rovna 5, cifru na místě daného řádu zvýšíme o jednotku.

Příklad ▼

Zaokrouhlete číslo na desítky: $28\mathbf{49} \doteq 2850$
Zaokrouhlete číslo na stovky: $2\mathbf{8}49 \doteq 2800$
Zaokrouhlete číslo na desetiny: $3{,}\mathbf{2}52 \doteq 3{,}3$
Zaokrouhlete číslo na setiny: $3{,}2\mathbf{52} \doteq 3{,}25$

Někdy se zvýšení řádu o jednotku projeví postupně zvýšením až o několik řádů výše.

Příklad ▼

Zaokrouhlete číslo na tisíciny: $1{,}99\mathbf{95} \doteq 2$.

Množina reálných čísel je **uspořádaná**. To znamená, že pro každá dvě reálná čísla *a, b* platí jedna z možností: $a > b$; $a = b$; $a < b$.
Pro každá tři reálná čísla *a, b, c* platí pravidla, která budeme využívat i při řešení nerovnic:
$a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$
$a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$
$a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$
$a > b \wedge c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c > b + c$

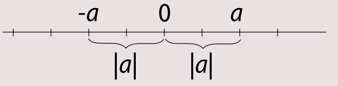
V množině reálných čísel je každé reálné číslo znázorněno na číselné ose právě jedním bodem a naopak, každý bod na číselné ose je obrazem právě jednoho reálného čísla. Obrazy všech reálných čísel vyplní celou číselnou osu.

Absolutní hodnota libovolného reálného čísla je definována jako vzdálenost jeho obrazu od počátku číselné osy. Absolutní hodnotu čísla a značíme $|a|$. Platí:

$|a| \geq 0$ pro $\forall a \in \mathbb{R}$ ... jedná se o vzdálenost, proto je $|a|$ vždy nezáporná

$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$



Příklad ▼

$|3{,}25| = 3{,}25$ $\qquad |-8| = -(-8) = 8$ $\qquad |2-6| = |-4| = 4$

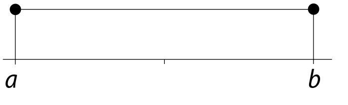
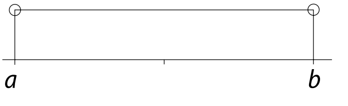
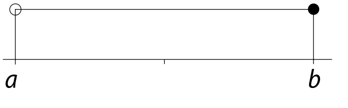
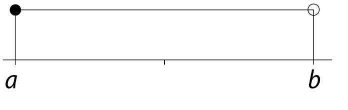
$\left|-\frac{4}{5}\right| = \frac{4}{5}$ $\qquad ||-3| - |6-8|| = |3 - |-2|| = |3-2| = |1| = 1$

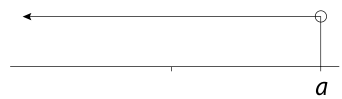
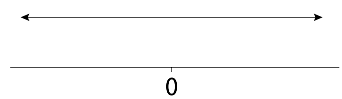
Pro počítání s absolutní hodnotou využijeme vztahy:

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ pro $b \neq 0$ $\qquad |a+b| \leq |a| + |b|$

Geometricky $|a-b|$ chápeme jako vzdálenost obrazů čísel a, b.

Pro vyjádření množiny reálných čísel, jejichž obrazy vyplní souvislou podmnožinu, užíváme **intervaly**.

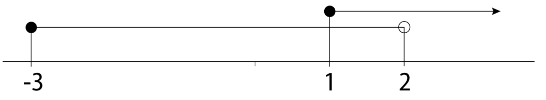
Název intervalu	Zápis	Charakteristická vlastnost	Znázornění na číselné ose
Uzavřený interval	$\langle a; b \rangle$	$a \leq x \leq b$	 a b
Otevřený interval	$(a; b)$	$a < x < b$	 a b
Polouzavřený (polootevřený) interval	$(a; b\rangle$	$a < x \leq b$	 a b
	$\langle a; b)$	$a \leq x < b$	 a b

Neomezený interval	$\langle a; +\infty)$	$x \geq a$	
	$(a; \infty)$	$x > a$	
	$(-\infty; a\rangle$	$x \leq a$	
	$(-\infty; a)$	$x < a$	
Oboustranně neomezený interval	$(-\infty; +\infty)$	$x \in \mathbb{R}$	

S intervaly jako množinami čísel můžeme provádět množinové operace.

Příklad ▼

$A = \{x \in \mathbb{R}; -3 \leq x < 2\} = \langle -3; 2)$ $\quad$ $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\} = \langle 1; +\infty)$



$A \cap B = \langle -3; 2) \cap \langle 1; +\infty) = \langle 1; 2)$ … průnik tvoří hodnoty společné oběma intervalům

$A \cup B = \langle -3; 2) \cup \langle 1; +\infty) = \langle -3; +\infty)$ … do sjednocení patří hodnoty z jednoho i z druhého intervalu

K procvičení

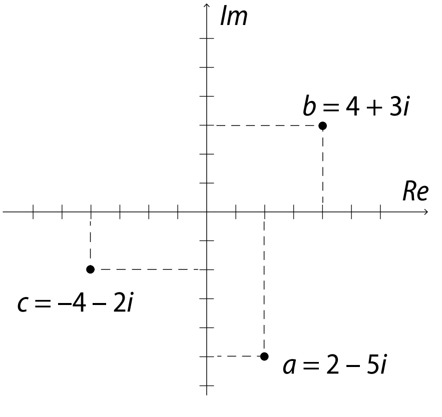
1. Zaokrouhlete:
   a) na desetiny číslo 128,269
   b) na stovky číslo 1596,234
   c) na desítky číslo 453,26
2. Vypočtěte:
   a) $||-9|-2\cdot|-4+8||$
   b) $|-|-2|-(3-8)+|4-10||$
   c) $\dfrac{|4-5^2|}{14}\cdot\dfrac{|-2|}{-|-3|}$
3. Znázorněte na číselné ose $A \cap B$ a $A \cup B$. Výsledek zapište intervalem.
   $A = \{x \in \mathbb{R}; -5 \leq x < 2\}$, $B = (-\infty; 0\rangle$

Výsledky

1. a) 128,3; b) 1600; c) 450
2. a) 1; b) 9; c) −1
3. $A \cap B = \langle -5; 0\rangle$; $A \cup B = (-\infty; 2)$

Komplexní čísla

V oboru komplexních čísel můžeme určit **odmocninu ze záporného čísla**, což v oboru reálných čísel nebylo možné. Díky tomu můžeme řešit i kvadratické rovnice se záporným diskriminantem, které v $\mathbb{R}$ neměly řešení. Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$.
Komplexním číslem nazýváme uspořádanou dvojici reálných čísel $a = [a_1; a_2]$, číslo a_1 nazýváme reálná část, číslo a_2 nazýváme imaginární část.
Při zobrazování komplexních čísel v pravoúhlé soustavě souřadnic reálnou část vynášíme na vodorovnou osu (reálná osa), imaginární část na svislou osu (imaginární osa). Každému komplexnímu číslu je přiřazen právě jeden bod roviny. Všechna komplexní čísla vyplní celou rovinu, kterou nazýváme **Gaussova rovina**.



Algebraický tvar komplexního čísla

Číslo $i = [0; 1]$ nazýváme **imaginární jednotka**. Platí $i^2 = -1, \sqrt{-1} = i$
Komplexní číslo $a = [a_1; a_2]$ zapisujeme v algebraickém tvaru $\boldsymbol{a = a_1 + a_2 \cdot i}$.
Absolutní hodnota $|a|$ **komplexního čísla** a vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku soustavy souřadnic a z geometrického významu platí vztah $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Všechna čísla, pro která platí $|a| = 1$, vyplní kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic o poměru 1. Nazýváme je **komplexní jednotky**.

Pro komplexní čísla $a = a_1 + a_2 \cdot i$, $b = b_1 + b_2 \cdot i$ jsou definovány následující operace:

Opačné číslo k číslu a (jejich obrazy jsou středově souměrné podle počátku)	$-a = -a_1 - a_2 \cdot i$
Převrácené číslo k číslu a	$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_1 + a_2 \cdot i}, \quad a \neq 0$
Číslo **komplexně sdružené** k číslu a (jejich obrazy jsou osově souměrné podle reálné osy)	$\overline{a} = a_1 - a_2 \cdot i$
Součet komplexních čísel	$a + b = (a_1 + a_2 \cdot i) + (b_1 + b_2 \cdot i) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$
Rozdíl komplexních čísel	$a - b = (a_1 + a_2 \cdot i) - (b_1 + b_2 \cdot i) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)i$
Součin komplexních čísel	$a \cdot b = (a_1 + a_2 \cdot i) \cdot (b_1 + b_2 \cdot i) = (a_1 b_1 - a_2 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$
Podíl komplexních čísel (rozšiřujeme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli)	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b}}{\overline{b}} = \frac{a_1 + a_2 \cdot i}{b_1 + b_2 \cdot i} \cdot \frac{b_1 - b_2 \cdot i}{b_1 - b_2 \cdot i} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} i$
Rovnost komplexních čísel	$a = b \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)$

Příklad ▼

$a = 3 + 2i;\ b = 5 - 3i$

$a + b = 3 + 2i + 5 - 3i = 8 - i$

$a - b = 3 + 2i - (5 - 3i) = -2 + 5i$

$a \cdot b = (3 + 2i)(5 - 3i) = 15 - 9i + 10i - 6i^2 = 15 + i + 6 = 21 + i$

$$\frac{a}{b} = \frac{3 + 2i}{5 - 3i} \cdot \frac{5 + 3i}{5 + 3i} = \frac{15 + 9i + 10i + 6i^2}{25 + 9} = \frac{9 + 19i}{34} = \frac{9}{34} + \frac{19}{34} i$$

Goniometrický tvar komplexního čísla

Pro popis komplexního čísla můžeme také využít jeho vzdálenost od počátku soustavy souřadnic (absolutní hodnotu) a orientovaný úhel α, který svírá kladná reálná poloosa s průvodičem daného komplexního čísla. Průvodič je spojnice čísla a počátku soustavy souřadnic.

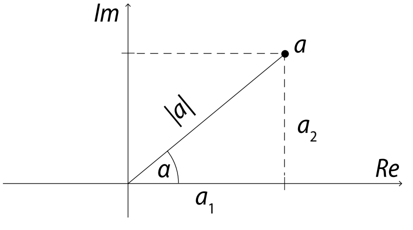
$$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha), \text{ kde } \alpha \in \langle 0; 2\pi)$$

Jestliže při operacích s komplexními čísly vyjde velikost úhlu α větší než 2π, resp. 360°, pak pracujeme pouze se základní velikostí.
Pozor! Toto nejsou goniometrické tvary komplexních čísel:

$$a = \left(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) \quad \text{.... různé úhly}$$

$$b = -3\,(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ) \quad \text{.... záporná „velikost“}$$

Z obrázku díky trigonometrii pravoúhlého trojúhelníku můžeme vyjádřit vztahy:



$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|} \longrightarrow a_1 = |a| \cdot \cos\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{|a|} \longrightarrow a_2 = |a| \cdot \sin\alpha$$

Těmto vztahům říkáme **převodní vztahy mezi algebraickým a goniometrických tvarem** komplexního čísla.

$$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = a_1 + a_2 \cdot i$$

Při převodu z algebraického na goniometrický tvar zjistíme absolutní hodnotu čísla a jeho argument α v základním tvaru. Využíváme vlastnosti goniometrických funkcí.

Příklad ▼

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i;\ a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2};\ a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (je to komplexní jednotka)}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{a_2}{|a|} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2}$$

Ze znamének goniometrických funkcí vyplývá, že argument α je z IV. kvadrantu,

$\alpha' = 30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha = 330^\circ = \dfrac{11}{6}\pi$. Potvrzuje to i zobrazení čísla v Gaussově rovině.

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \left(\cos\frac{11}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{11}{6}\pi\right) = (\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ)$$

Příklad ▼

$$b = -4 + 4i,\ b_1 = -4,\ b_2 = 4$$

$$|b| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = \sqrt{2 \cdot 16} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos\beta = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Argument β je ze II. kvadrantu,

$$\beta' = 45^\circ = \frac{\pi}{4},\ \beta = 135^\circ = \frac{3}{4}\pi$$

$$b = -4 + 4i = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i \cdot \sin\frac{3}{4}\pi\right) = 4\sqrt{2}\,(\cos 135^\circ + i \cdot \sin 135^\circ)$$

Při převodu z goniometrického tvaru na algebraický určíme hodnoty goniometrických funkcí a upravíme.

Příklad ▼

$$a = 4\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{6}\pi\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2i$$

$$b = 5\,(\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ) = 5\,(0 - i) = -5i$$

Pro komplexní čísla $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha),\ b = |b| \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$ jsou definovány operace:

Součin komplexních čísel	$a \cdot b = |a| \cdot |b| \left[\cos(\alpha + \beta) + i \cdot \sin(\alpha + \beta)\right]$
Podíl komplexních čísel	$\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot \left[\cos(\alpha - \beta) + i \cdot \sin(\alpha - \beta)\right],\ b \neq 0$
Mocnina komplexního čísla (Moivreova věta)	$a^n = |a|^n \cdot (\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$

Příklad

$a = 3(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$

$a^5 = 3^5(\cos 1200^\circ + i \cdot \sin 1200^\circ) = 243(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$

Sčítat či odčítat komplexní čísla můžeme tedy jen v algebraickém tvaru, umocňovat komplexní číslo je vhodné naopak ve tvaru goniometrickém s využitím Moivreovy věty (umocňovat goniometrické číslo v algebraickém tvaru s využitím binomické věty není praktické). Při násobení a dělení umíme operaci provést pro komplexní čísla v obou tvarech.

Pozn. **Násobení imaginární jednotkou** i má geometrický význam otočení o 90°, protože $i = \cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ$.

K procvičení

1. Převeďte na goniometrický tvar komplexního čísla:
   a) $a = -2 - 2i$
   b) $b = 1 + i$
2. Převeďte na algebraický tvar komplexního čísla:
   a) $a = 4\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \cdot \sin \frac{7}{4}\pi\right)$
   b) $b = 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$
3. Určete třetí mocninu čísla $a = 4 - 4i$.
4. Sečtěte a odečtěte čísla $a = -2 - 2i$, $b = 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$.
5. Vynásobte a vydělte čísla $a = 4\left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \cdot \sin \frac{7}{4}\pi\right)$, $b = 1 + i$.

Výsledky

1. a) $a = 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ)$
   b) $b = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \cdot \sin 45^\circ)$
2. a) $a = 2\sqrt{2} - i \cdot 2\sqrt{2}$
   b) $b = -1 - i\sqrt{3}$
3. $a^3 = 128\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ) = 128\sqrt{2}\left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \cdot \sin \frac{5}{4}\pi\right) = -128 - 128i$
4. $a + b = -3 - i(2 + \sqrt{3})$; $a - b = -1 + i(\sqrt{3} - 2)$
5. $a \cdot b = 4\sqrt{2}(\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = 4\sqrt{2}$; $\frac{a}{b} = 2\sqrt{2}(\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ) = -2\sqrt{2} \cdot i$

3. MOCNINY

Mocniny s přirozeným exponentem

Pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-krát}}$.

Číslo a nazýváme **základ** mocniny (mocněnec), n je **exponent** (mocnitel), výraz a^n se nazývá n-tá mocnina čísla a.

Pro každé reálné číslo platí $a = a^1$.
Pro každé přirozené číslo n platí $1^n = 1$; $0^n = 0$.
Pro reálné základy mocnin a, b a pro přirozené exponenty r, s platí:

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{pro } r > s,\ a \neq 0$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{pro } b \neq 0$$

Dále platí, že umocněním kladného čísla získáme vždy číslo kladné: pro $a > 0$ je $a^n > 0$.
Sudá mocnina záporného základu je číslo kladné: pro $a < 0$ je $a^{2n} > 0$.
Lichá mocnina záporného základu je číslo záporné: pro $a < 0$ je $a^{2n-1} < 0$.

Příklad ▼

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$$

$$5^8 : 5^3 = 5^{8-3} = 5^5$$

$$(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

$$(4^2)^5 = 4^{2 \cdot 5} = 4^{10}$$

Mocniny s celočíselným exponentem

Platí stejná pravidla jako pro mocniny s přirozenými exponenty a navíc definujeme pro každé nenulové reálné číslo ($\forall\, a, b \in \mathbb{R} \wedge a, b \neq 0$) a pro každé celé číslo ($\forall\, n \in \mathbb{Z}$):

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$