



WORLD SCIENCE – 2019



Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference
Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019

WORLD SCIENCE – 2019

Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference

Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019

Czech Republic, Karlovy Vary - Russia, Kirov, 2019

UDC 001
BBK 72
N 76

Scientific editor

Mamonova Yelena Borisovna, Ph.D., Associate Professor, Nizhny Novgorod State Pedagogical University named after Kozma Minin (Minin University)

Reviewer

Serkhacheva Natal'ya Sergeevna, Ph.D., Associate Professor, MIREA - Russian Technological University

N 76 World Science – 2019: Proceedings of articles the V International Scientific Practical Conference. Czech Republic, Karlovy Vary- Russia, Moscow, May 29-30, 2019 [Electronic resource] / Editors as. prof. Ye. B. Mamonova. – Electron. txt. d. (1 file 2,4 MB). – Czech Republic, Karlovy Vary: Skleněný Můstek – Russia, Kirov: MCNIP, 2019. - ISBN 978-80-7534-225-6+ ISBN 978-5-00090-151-9.

Proceedings includes materials of the international scientific conference « World Science – 2019», held in Czech Republic, Karlovy Vary-Russia, Moscow, May 29-30, 2019. The main objective of the conference - the development community of scholars and practitioners in various fields of science. Conference was attended by scientists and experts from Azerbaijan, Belarus, Kazakhstan, Kyrgyzstan, Russia, Uzbekistan.

ISBN 978-80-7534-225-6 (Skleněný Můstek, Karlovy Vary, Czech Republic)
ISBN 978-5-00090-151-9 (MCNIP LLC, Kirov, Russian Federation)

Articles are published in author's edition. Editorial opinion may not coincide with the views of the authors

Reproduction of any materials collection is carried out to resolve the editorial board

© Skleněný Můstek, 2019

© MCNIP LLC, 2019

TABLE OF CONTENTS

| | |
|---|-----------|
| Section 1. Physics and Mathematics | 7 |
| О чебышевских клиньях конечной размерности и конечной коразмерности..... | 8 |
| О наилучшей аппроксимации клиньями в пространстве суммируемых функций..... | 23 |
| Section 2. Chemistry..... | 33 |
| Синтез амфифильных блок-сополимеров акриловой кислоты, н- бутилакрилата и N-изопропилакриламида..... | 34 |
| Section 3. Technology..... | 40 |
| Повышение эффективности холодной штамповки ступенчатых втулок с помощью вытяжки по внутренней поверхности | 41 |
| Анализ возможности повышения качества услуг передачи данных с использованием IEEE 802.3ad в системе подвижной спутниковой связи INMARSAT-4..... | 49 |
| Методы машинного обучения для нейрокомпьютерного интерфейса, мобильных и веб-приложений | 55 |
| Применение модели ИИ для прогнозирования сбоев IT - инфраструктуры, управления и мониторинга уровня SLA..... | 67 |
| Незаконная деятельность в теневой паутине и способы борьбы с нею | 74 |
| Section 4. Agriculture | 83 |
| Применение зеленых удобрений (сидератов) для повышения плодородия почвы | 84 |
| Section 5. Economics | 89 |
| Студенческое предпринимательство: организация, преимущества, контроль..... | 90 |

| | |
|---|------------|
| Динамика валютного курса белорусского рубля..... | 94 |
| Section 6. Philosophy | 100 |
| Изучение особенностей взаимодействия религиозного и светского мировоззрения в философии | 101 |
| Section 7. Philology | 108 |
| Основные параметры измерения жизнеспособности языка..... | 109 |
| Section 8. Pedagogy | 119 |
| Методические особенности совершенствования навыков аудирования студентов по английскому языку..... | 120 |
| Профессиональное воспитание как механизм карьерной навигации будущих специалистов педагогического образования..... | 129 |
| Section 9. Medicine..... | 138 |
| Активность вегетативной нервной системы у пациентов с хроническими дерматозами, в условиях, приравненных к районам крайнего севера, по результатам исследования вариабельности сердечного ритма | 139 |
| Section 10. Art Criticism | 144 |
| Хоровая музыка англоязычных стран в исполнительской практике: к проблеме артикуляции в пении | 145 |
| Section 11. Psychology | 154 |
| Особенности развития личностного потенциала детей предподросткового возраста в аспекте проблемы преемственности школьного образования..... | 155 |
| Особенности экспресс-диагностики личностных, познавательных, регулятивных и коммуникативных учебных действий младших подростков..... | 163 |
| Развитие умения распознавать эмоции старших подростков в условиях совместной деятельности..... | 171 |
| Section 12. Cultural Studies..... | 177 |
| Зеленый PR как инструмент продвижения бренда на примере индустрии моды | 178 |

Section 13. Earth Sciences185

Проблемы классификации запасов и ресурсов нефти и горючих газов186

SECTION 1.

PHYSICS AND

MATHEMATICS

О ЧЕБЫШЕВСКИХ КЛИНЯХ КОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ И КОНЕЧНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

ФЕДОРОВ В.М.

Россия, МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА

Аннотация. В статье изучаются вопросы существования и единственности наилучшего приближения клином конечной размерности и конечной коразмерности в нормированном пространстве. Основным результатом является доказательство необходимых и достаточных условий для того, чтобы клин $K \subset C(X)$ являлся чебышевским, т.е. обладал свойствами существования и единственности. Доказанные ниже теоремы обобщают хорошо известные результаты Хаара [1], Колмогорова [2], Зингера [3,4], Фелпса [5,6], Гаркави [7,8,9], полученные ими для действительных подпространств конечной размерности и конечной коразмерности.

Ключевые слова: чебышевский клин, полярный клин, опорный функционал, мера, размерность клина, коразмерность клина, хаусдорфовый компакт.

Abstract. The article studies the problems of existence and uniqueness of the best approximation by a wedge of finite dimension and finite codimension in a normed space. The main result is the proof of the necessary and sufficient conditions for the wedge $K \subset C(X)$ to be Chebyshev, that is, possessed properties of existence and uniqueness. The theorems proved below generalize the well-known results of Haar [1], Kolmogorov [2], Singer [3,4], Phelps [5,6], Garkavi [7,8,9], which they obtained for real subspaces of finite dimension and finite codimension.

Введение

Пусть E обозначает нормированное пространство над полем действительных или комплексных чисел \mathbb{F} . Непустое подмножество $K \subset E$ называется *клином*, если $x + y, tx \in K$ при всех $x, y \in K$ и $t \geq 0$. Клин называется *конусом*, если $K \cap (-K) = 0$. Пусть $K^\circ \doteq \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re} \alpha(x) \leq 0, x \in K\}$ обозначает *полярный** клин в сопряженном пространстве E^* . Если клин K является подпространством $L \subset E$ над полем \mathbb{R} , то его *аннулятор** $L^\perp \doteq \{\alpha \in E^* \mid \operatorname{Re} \alpha(x) = 0, x \in K\} = L^\circ$. Обозначим через $S \doteq \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$

замкнутый единичный шар в E и через $\Xi(\alpha) \doteq \{x \in S \mid \alpha(x) = \|\alpha\|\}$ – экстремальное множество функционала $\alpha \in E^*$. Функционал $\alpha \in E^*$ называется опорным, если множество $\Xi(\alpha) \neq \emptyset$ не пусто.

Пусть далее $K \subset E$ обозначает замкнутый клин в банаховом пространстве E . Обозначим через $\hat{E} \doteq E/K$ факторпространство смежных классов $\hat{x} = x - K$ в пространстве E и через $\rho(x, K) \doteq \|\hat{x}\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ величину расстояния от точки x до K , которую обычно называют наилучшим приближением клином K . Клин $K \subset E$ называется чебышевским, если для любого $x \in E$ множество $P_K(x) \doteq \{y \in K \mid \|x - y\| = \|\hat{x}\|\}$ состоит ровно из одной точки.

Далее обозначим через $\nabla_p K \doteq \text{cone}(K - p)$ опорный клин в точке $p \in K$, т.е. коническую оболочку множества $K - p$; обозначим через $\Pi_p K \doteq \nabla_p K \cap (-\nabla_p K)$ опорная плоскость в точке $p \in K$, т.е. наибольшее действительное линейное подпространство, содержащееся в опорном клине $\nabla_p K$; и, наконец, обозначаем через $\nabla_p^\circ K \doteq (\nabla_p K)^\circ$ полярный* клин опорного клина $\nabla_p K$ в точке $p \in K$.

Основные результаты

Вначале мы рассмотрим необходимые и достаточные условия единственности наилучшего приближения клином в нормированном пространстве E .

Лемма 1. *Замкнутый клин $K \subset E$ в нормированном пространстве E тогда только тогда обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда для любой точки $p \in K$ и для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ пересечение $(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K = 0$ равно нулю.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и $\|\alpha\| = 1$. Допустим, что множество $\Xi(\alpha)$ имеет две различные точки $x, u \in \Xi(\alpha)$, т.ч. $u = x - y \in \Pi_p K$. В силу его выпуклости $x - tu \in \Xi(\alpha)$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Поэтому $\|x - tu\| = 1$ и $\|x - u\| \geq \text{Re } \alpha(x - u) = \text{Re } \alpha(x) - \text{Re } \alpha(u) \geq \text{Re } \alpha(x) = 1$ при всех $u \in \nabla_p K$, т.е. норма $\|x - tu\| = \rho(x, \nabla_p K) = 1$ равна расстоянию

от точки x до клина $\nabla_p K$. Отсюда мы имеем равенство $\|(x+p) - (p+tu)\| = \rho(x+p, K) = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Поскольку $p+tu \in K$ при достаточно малых $t > 0$, то клин K не обладает свойством единственности наилучшего приближения.

Достаточность. Если клин не обладает свойством единственности, то в силу выпуклости существуют $x \in E$, $p \in K$ и $u \in \nabla_p K \setminus 0$, т.ч. при всех $-1 \leq t \leq 1$ получим $\|x - (p+tu)\| = \rho(x, K) = 1$, где $p+tu \in K$. Так как $\Pi_p K$ образует крайнее множество клина $\nabla_p K$, то $u \in \Pi_p K$. Полагая $y_t = x - p - tu$, мы имеем $\|y_0\| = \rho(y_0, \nabla_p K) = \rho(x, K) = 1$. По теореме отделимости выпуклых множеств [13, с. 42] существует $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. $\alpha(y_0) = \|\alpha\| = 1$. Поскольку $\Xi(\alpha)$ является крайним множеством шара S , то $y_t \in \Xi(\alpha)$ при всех $-1 \leq t \leq 1$. Следовательно, $u \in (\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K$, что противоречит нашему предположению.

Лемма 2. Если клин $K \subset E$ конечной размерности $\dim_{\mathbb{R}} K = t$ не является чебышевским, тогда существуют точка $p \in K$, ненулевой вектор $u \in \Pi_p K$ и линейно независимая система $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{ex } S^*$ крайних точек единичного шара $S^* \subset E^*$, т.ч. $n \leq t$ и выполняются следующие условия:

имеют место равенства $\alpha_k(u) = 0, k = 1, \dots, n$;

найдутся такие числа $c_k > 0$, что $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$.

Доказательство. Так как по условию клин K не является чебышевским, то в силу выпуклости существуют элемент $x \in E$, точка $p \in K$ и ненулевой вектор $u \in \Pi_p K$, т.ч. $\|x - (p+tu)\| = \rho(x, K) = 1$ при всех $-1 \leq t \leq 1$. Обозначим далее через $M \doteq \text{sp}\{y, \nabla_p K\}$ линейную оболочку вектора $y = x - p$ и клина $\nabla_p K$. Применяя теорему отделимости к единичному шару $S(y)$ пространства M с центром в точке y и к клину $\nabla_p K$, мы получим функционал $\beta \in M^*$, т.ч. $\beta \in \nabla_p^\circ K$ и $\beta(y) = \|\beta\| = 1$. Тогда функционал β принадлежит крайнему подмножеству $\Xi^*(y) \doteq \Xi(\delta_y)$ границы единичного шара в пространстве M^* . Поскольку $\Xi^*(y)$ является выпуклой оболочкой своих крайних точек, то найдутся такие крайние точки β_1, \dots, β_n , что $\beta(v) = \sum_{k=1}^n c_k \beta_k(v)$ при $v \in M$, где $\sum_{k=1}^n c_k = 1, c_k > 0, k = 1, \dots, n$. Так как

$\|\beta_k\| = 1, k = 1, \dots, n,$ и $\beta(u) = 0,$ то при всех $-1 \leq t \leq 1$ имеем $1 = \beta(y) = \operatorname{Re} \beta(y + tu) = \sum_{k=1}^n c_k \operatorname{Re} \beta_k(y + tu) \leq \sum_{k=1}^n c_k \|y + tu\| = 1.$

Следовательно, $\operatorname{Re} \beta_k(y + tu) = 1$ при всех $-1 \leq t \leq 1$ и $k = 1, \dots, n.$ Поэтому $\beta_k(y) = 1$ и $\beta_k(u) = 0$ при $k = 1, \dots, n.$ Поскольку аннулятор вектора u в M^* является m -мерным подпространством пространства, то можно считать, что функционалы β_1, \dots, β_n линейно независимы и $n \leq m.$

Обозначим через B_k совокупность всех продолжений функционала β_k из подпространства M на все пространство E с сохранением его нормы. Тогда B_k образует выпуклое и слабо* замкнутое подмножество границы шара $S^* \subset E^*$ и значит имеет крайнюю точку $\alpha_k \in \operatorname{ex} B_k.$ Так как β_k является крайней точкой шара в $M^*,$ то B_k является крайним подмножеством границы шара $S^*.$ Поэтому $\alpha_k \in \operatorname{ex}(S^*), k = 1, \dots, n,$ будут крайними точками шара $S^*.$ Кроме того, они линейно независимы и, значит, удовлетворяют всем условиям леммы.

Теорема 1. *Замкнутый клин $K \subseteq E$ конечной коразмерности обладает свойством единственности наилучшего приближения тогда и только тогда, когда при всех $p \in K$ и ненулевых опорных функционалах $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ выполняется неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p$ и любая линейно независимая система крайних точек множества $\Xi(\alpha)$ линейно не зависит от $\Pi_p K,$ где $n_p = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_p K.$*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что имеет место неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) \geq n_p$ для некоторого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K.$ Мы можем считать, что функционал удовлетворяет условию $\|\alpha\| = 1.$ Рассмотрим подпространство $M \subset \operatorname{sp}_{\mathbb{R}}\{\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)\}$ размерности $\dim_{\mathbb{R}} M = n_p.$ Поскольку размерность M равна коразмерности $\Pi_p K$ и оба они лежат в гиперплоскости $\operatorname{Re} \alpha(x) = 0,$ то пересечение $M \cap \Pi_p K \neq 0$ не равно нулю, что противоречит лемме 3. Таким образом, доказано неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p.$

Пусть $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) = n.$ Рассмотрим линейно независимую систему крайних точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ множества $\Xi(\alpha)$ и предположим, что она линейно зависит от $\Pi_p K.$ Поскольку $\alpha(e_k) = 1$ и $\Pi_p K \subset \operatorname{Reker}(\alpha),$ то существуют такие числа

$c_k \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, что $x = \sum_{k=1}^{n+1} c_k e_k \in \Pi_p K$ и $\operatorname{Re} \alpha(x) = \sum_{k=1}^{n+1} c_k = 0$. Разбивая эту сумму на две, соответствующие положительным и отрицательным числам c_k , мы получим $x = \sum_{c_k > 0} c_k e_k + \sum_{c_k < 0} c_k e_k = c(y - z)$, где $c = \sum_{c_k > 0} c_k$ и $y, z \in \Xi(\alpha)$. Отсюда вытекает, что $x/c = y - z \in (\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K$. Это невозможно по лемме 1. Таким образом, необходимость утверждения доказана.

Достаточность. Если конус K не обладает свойством единственности, то в силу леммы 1 имеем $(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K \neq 0$ для некоторых $p \in K$ и $\alpha \in \nabla_p^\circ K$. Поэтому существуют такие $y, z \in \Xi(\alpha)$, что $x/c = y - z \in \Pi_p K$ и $x \neq 0$. Пусть $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) = n$, тогда вектор x является линейной комбинацией $n + 1$ линейно независимых крайних точек множества $\Xi(\alpha)$. Следовательно, эти крайние точки линейно зависят от $\Pi_p K$ и мы получили противоречие.

Рассмотрим пространство $C(X)$ непрерывных функций со значениями в поле \mathbb{F} , определенных на компактном хаусдорфовом пространстве X с равномерной нормой $\|f\| \doteq \sup_{x \in X} |f(x)|$. Для каждого функционала $\alpha \in C^*(X)$ по теореме Рисса-Маркова существует такая единственная регулярная борелевская мера ν на компакте X со значениями в поле \mathbb{F} , для которой функционал представляется в виде интеграла $\alpha(f) = \int_X f d\nu$ при всех $f \in C(X)$ и норма $\|\alpha\| = |\nu|(X)$, где $|\nu|$ обозначает вариацию меры ν [10, с. 288].

Пусть $\nu = (\nu_1 - \nu_2) + i(\nu_3 - \nu_4)$ жорданово разложение [10, с. 113] меры ν , где ν_k , $k = 1, 2, 3, 4$, неотрицательные регулярные борелевские меры. Меры ν_k являются абсолютно непрерывными относительно меры $\lambda \doteq \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$. По теореме Радона-Никодима [10, с. 194] существуют борелевские функции, $\rho_k \in L^1(X, \lambda)$ т.ч. $d\nu_k = \rho_k d\lambda$. Тогда функция $\rho \doteq |(\rho_1 - \rho_2) + i(\rho_3 - \rho_4)|$ почти всюду (μ) положительна на X , а функция $\phi \doteq (\rho_1 - \rho_2)/\rho + i(\rho_3 - \rho_4)/\rho$ имеет модуль $|\phi| = 1$ почти всюду (μ). Функция ϕ называется *аргументом* меры ν , а неотрицательная регулярная борелевская мера $d\mu = \rho d\lambda$ называется *модулем* меры ν . Выражение меры в виде $d\nu \doteq \phi d\mu$ называется *полярным разложением* представляющей меры функционала $\alpha \in C^*(X)$ с нормой $\|\alpha\| = \mu(X)$.

Лемма 3. Ненулевой функционал $\alpha \in C^*(X)$ тогда и только тогда является опорным, когда аргумент $\phi \doteq \arg(\alpha)$ его представляющей меры $d\nu \doteq \phi d\mu$ совпадает почти всюду (μ) с непрерывной функцией на компакте X .

Доказательство. Если аргумент $\phi \doteq \arg(\alpha)$ почти всюду равен непрерывной функцией $g \in C(X)$, то $\alpha(\bar{g}) = \mu(X) = \|\alpha\|$, т.е. функционал является опорным. Обратно, если $\alpha(\bar{g}) = \|\alpha\|$, где функция $g \in C(X)$ удовлетворяет условию $|g(x)| \leq 1$, то $\int_X \bar{g}\phi d\mu = \int_X \operatorname{Re}(\bar{g}\phi) d\mu = \mu(X)$. Отсюда $\operatorname{Re}(\bar{g}(x)\phi(x)) = 1$ п.в. на T . Так как $|\phi(x)| = 1$, то получаем $g(x) = \phi(x)$ почти всюду на компакте X .

Определение. Пусть клин $K \subset C(X)$ замкнут и точка $p \in K$. Обозначим через $\operatorname{zero}(f) \doteq \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ множество всех нулей функции $f \in C(X)$.

Будем говорить, что ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ имеет полярные нули, если найдется такая ненулевая линейная комбинация $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k}$ функционалов Дирака δ_{x_k} , где $\{x_k\}_{k=1}^n \subset \operatorname{zero}(u)$ и $c_k \in \mathbb{F}$, что $\alpha \in \nabla_p^\circ K$.

В случае, когда клин K является подпространством $L \subset C(X)$ размерности $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, то его опорные клинья и опорные плоскости совпадают с L , а все полярные* конусы совпадают с аннулятором L^\perp . Докажем, что функционалы Дирака $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$, где x_1, \dots, x_n различные точки компакта X , линейно зависят от аннулятора L^\perp , тогда и только тогда, когда в подпространстве L существует ненулевая функция $v \in L$, имеющая n нулей $v(x_k) = 0, k = 1, \dots, n$.

Пусть $M \doteq \operatorname{sp}\{\delta_{x_k}\}_{k=1}^n$ линейная оболочка в сопряженном пространстве $C^*(X)$. Функционалы $\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}$ линейно зависят от подпространства L^\perp в том и только в том случае, когда найдется ненулевая линейная комбинация $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k}$, где $c_k \in \mathbb{F}$, т.ч. $\alpha \in L^\perp$, т.е. справедливо неравенство $M \cap L^\perp \neq 0$. Так как M и L имеют размерность n , то это равносильно тому, что $M_\perp \cap L \neq 0$. Для того чтобы выполнялось последнее условие, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая ненулевая функция $v \in L$, для которой $\delta_{x_k}(v) = v(x_k) = 0, k = 1, \dots, n$.

Таким образом, если $L \subset C(X)$ подпространство размерности $\dim_{\mathbb{R}} L = n$, то некоторая ненулевая функция из L имеет полярные нули тогда и только тогда, когда L содержит ненулевую функцию, имеющую не менее, чем n нулей.

Теорема 2. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной размерности является чебышевским тогда и только тогда, когда для любой точки $p \in K$ каждая ненулевая функция из опорной плоскости $\Pi_p K$ не имеет полярных нулей.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует точка $p \in K$ и ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ имеющая полярные нули. Тогда по определению существует ненулевой функционал вида $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \delta_{x_k}$, где $\{x_k\}_{k=1}^n \in \text{zero}(u)$ и $c_k \in \mathbb{F}$, принадлежащий $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и имеющий норму $\|\alpha\| = \sum_{k=1}^n |c_k| = 1$. При этом действительная часть $\text{Re } \alpha$ аннулирует опорную плоскость $\Pi_p K$.

Применяя теорему Урысона [10, с. 26], построим функцию $h \in C(X)$ с нормой $\|h\| = 1$, т.ч. $h(x_k) \doteq \text{sign } c_k$, где $\text{sign } a = a/|a|$, если $a \neq 0$, и $\text{sign } a = 0$, если $a = 0$, обозначает знак числа a . Ясно, что $\alpha(\bar{h}) = \|\alpha\| = 1$. Определим функцию $f \in C(X)$ по формуле $f(x) \doteq p(x) + \overline{h(x)}(1 - |u(x)|)$. Тогда будут выполняться равенства $\|f - p\| = 1$ и $f(x_k) - p(x_k) = \overline{\text{sign } c_k}$ при всех $k = 1, \dots, n$. Так как $|f(x) - p(x) - tu(x)| \leq |h(x)|(1 - |u(x)|) + t|u(x)| \leq 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$ и $x \in X$, то имеет место равенство $\|f - p - tu\| = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$.

С другой стороны, для каждой функции $v \in \nabla_p K$ выполняется неравенство $\|f - p - v\| \geq \text{Re } \alpha(f - p - v) \geq \text{Re } \alpha(f - p) = \text{Re } \alpha(h) = 1$. Отсюда получаем $\|x - p - tu\| = \rho(x, K) = 1$ при всех $0 \leq t \leq 1$. Таким образом, элементы вида tu при $0 \leq t \leq 1$ являются наилучшим приближением функции $f - p$ опорным клином $\nabla_p K$. Следовательно, при достаточно малых $t > 0$ элементы $p + tu \in K$ будут наилучшим приближением для функции f .

Достаточность. Если конус K не является чебышевским в пространстве $C(X)$, то в силу леммы 2 существуют такие точка $p \in K$, ненулевая функция

$u \in \Pi_p K$ и линейно независимая система $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{ex } S^*$ крайних точек единичного шара $S^* \subset C^*(X)$, что $n \leq m$ и выполняются следующие условия:

(a) имеют место равенства $\alpha_k(u) = 0, k = 1, \dots, n$;

(b) найдутся такие числа $c_k > 0$, что $\alpha = \sum_{k=1}^n c_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$.

Как известно, каждая крайняя точка единичного шара $S^* \subset C^*(X)$ с точностью до множителя, по модулю равного единице, является функционалом Дирака δ_x [10, с. 478]. Следовательно, в силу условия (a) существуют такие точки $x_k \in X$ что $u(x_k) = 0, k = 1, \dots, n$. Кроме того, в силу условия (b) некоторая ненулевая линейная комбинация функционалов Дирака $\alpha = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k \in \nabla_p^\circ K$, где $b_k \in \mathbb{F}$. Таким образом, мы получили систему полярных нулей некоторой ненулевой функции $u \in \Pi_p K$, что невозможно по условию.

Теорема 2 имеет достаточно общий характер. Например, из нее легко можно вывести теоремы Хаара [1, р. 311] и Колмогорова [2, с. 300]. В части условия единственности теорема 8 распространяется на конусы бесконечной размерности в виде теоремы 3, т.к. если ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ имеет полярные нули, то существует ненулевой функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, для которого $\text{supp}(\alpha) \subset \text{zero}(u)$. В случае, когда клин является подпространством в $C(X)$, то теорему 3 в другой формулировке доказал Зингер [3, р. 165], а затем доказал Фелпс [6, р. 649].

Теорема 3. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ тогда и только тогда не обладает свойством единственности наилучшего приближения, когда существуют точка $p \in K$, ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и некоторая ненулевая функция $u \in \Pi_p K$, для которых имеет место включение $\text{supp}(\alpha) \subset \text{zero}(u)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Если клин $K \subset C(X)$ не обладает свойством единственности, то по лемме 1 существуют точка $p \in K$ и ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$, т.ч. пересечение $(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K = 0$ равно нулю. Обозначая через $dv \doteq \phi d\mu$ представляющую меру функционала α , мы можем считать, что норма $\|\alpha\| = \mu(X) = 1$. Поэтому

существуют две различные функции $f_1, f_2 \in \Xi(\alpha)$, т.ч. будет выполняться включение $u = (f_1 - f_2)/2 \in \Pi_p K$. В силу выпуклости множества $\Xi(\alpha)$ получим $f = (f_1 + f_2)/2 \in \Xi(\alpha)$. Следовательно, мы имеем $\alpha(f) = \int_X f \phi d\mu = \mu(X) = 1$, $\alpha(f + u) = \int_X (f + u) \phi d\mu = \mu(X) = 1$. Так как $\|f\| = \|f + u\| = 1$, то равенство $f(x)\phi(x) = (f(x) + u(x))\phi(x) = 1$ выполняется (μ) почти всюду. Отсюда следует, что $f(x) = f(x) + u(x) = \overline{\phi(x)}$ и поэтому функция $u(x) = 0$ равна нулю (μ) почти всюду на компакте X . Поскольку функция $u \in C(X)$ непрерывна, то $u(x) = 0$ при всех $x \in \text{supp}(\alpha)$. Таким образом, мы имеем включение $\text{supp}(\alpha) \subset \text{zero}(u)$.

Достаточность. Рассмотрим ненулевой опорный функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ и ненулевую функцию $u \in \Pi_p K$, т.ч. $\text{supp}(\alpha) \subset \text{zero}(u)$. Мы можем считать, что нормы $\|\alpha\| = \|u\| = 1$. Пусть $dv \doteq \phi d\mu$ представляющая мера функционала α . Поскольку данный функционал α является опорным, то по лемме 6 аргумент ϕ его представляющей меры совпадает (μ) почти всюду с непрерывной функцией $g \in C(X)$, у которой норма $\|g\| = 1$. Рассмотрим непрерывную функцию вида $f(x) = \overline{g(x)}(1 - |u(x)|)$. Тогда $f(x) = \overline{g(x)} = \overline{\phi(x)}$ (μ) почти всюду. Кроме того, имеем $|f(x)| \leq 1 - |u(x)| \leq 1$ и $|f(x) + u(x)| \leq 1 - |u(x)| + |u(x)| = 1$ при всех $x \in X$. Поэтому $\|f\| = \|f + u\| = 1$. Так как $u(x) = 0$ на носителе α , то $\alpha(f + u) = \alpha(f) = \alpha(\overline{g}) = \mu(X) = 1$, т.е. $f, f + u \in \Xi(\alpha)$. Следовательно, ненулевая функция $u \in \Pi_p K$ принадлежит пересечению $(\Xi(\alpha) - \Xi(\alpha)) \cap \Pi_p K$. Таким образом, по лемме 1 клин K не обладает свойством единственности.

Рассмотрим свойства клиньев $K \subset C(X)$ конечной коразмерности, которые обладают свойством единственности наилучшего приближения. Обозначим через $n_p \doteq \text{codim}_{\mathbb{R}} \Pi_p K$ коразмерность опорной плоскости $\Pi_p K$. Далее мы будем обозначать через m_p число $n_p - 1$ в действительном случае $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ и целую часть числа $(n_p - 1)/2$ в комплексном случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Как обычно, характеристическая функция множества $A \subset X$ обозначается через χ_A .

Теорема 4. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной коразмерности обладает свойством единственности наилучшего приближения тогда и только*

тогда, когда для всякой точки $p \in K$ и для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ выполняются следующие условия:

- (a) множество $\text{zero}(\alpha) = X \setminus \text{supp}(\alpha)$ имеет не более, чем m_p точек;
- (b) система функций $\{\chi_x | x \in \text{zero}(\alpha)\}$ линейно не зависит от $\Pi_p K$ над полем \mathbb{F} .

Доказательство. Пусть $p \in K$ и функционал $\alpha \in \nabla_p^\circ K$. В силу теоремы 3 клин K обладает свойством единственности в том и только в том случае, когда выполняется неравенство $\dim_{\mathbb{R}} \Xi(\alpha) < n_p$ и система крайних точек множества $\Xi(\alpha)$ линейно не зависит от $\Pi_p K$. Поскольку для каждого ненулевого опорного функционала $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ с нормой $\|\alpha\| = 1$ и для всех $f \in \Xi(\alpha)$ имеют место соотношения $\alpha(f) = \int_X f d\nu = \int_X f \phi d\mu = \mu(X) = 1$, где $d\nu \doteq \phi d\mu$ обозначает представляющую меру α , то функция f совпадает с сопряженным аргументом $\bar{\phi}(\mu)$ почти всюду на компакте X . Следовательно, функцию $\bar{\phi}$ можно считать непрерывной на носителе $\text{supp}(\alpha)$ и равной нулю на множестве $\text{zero}(\alpha)$.

Обозначим через k_α количество точек множества $\text{zero}(\alpha)$. Крайними точками множества $\Xi(\alpha)$ являются функции $\bar{\phi} + \sum_{x \in \text{zero}(\alpha)} \varepsilon_x \chi_x$, где $|\varepsilon_x| = 1$, а само множество $\Xi(\alpha)$ совпадает с выпуклой оболочкой указанных функций. Его размерность равна числу k_α в действительном случае и числу $2k_\alpha$ в комплексном случае. Отсюда количество точек $k_\alpha \leq m_p$. Так как функция $\bar{\phi}$ удовлетворяет условию $\alpha(\bar{\phi}) = 1$ и $\text{Re}(\alpha) \in \Pi_p^\perp K$, то независимость системы крайних точек множества $\Xi(\alpha)$ от подпространства $\Pi_p K$ равносильна независимости системы функций $\{\chi_x | x \in \text{zero}(\alpha)\}$ от $\Pi_p K$ над полем \mathbb{F} . Таким образом, утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Определение. Пусть $d\nu_1 = \phi_1 d\mu_1$ и $d\nu_2 = \phi_2 d\mu_2$ задают представляющие меры для функционалов $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*(X)$. Говорят, что α_1 абсолютно непрерывен относительно α_2 , если мера μ_1 абсолютно непрерывна относительно μ_2 на носителе $\text{supp}(\mu_2)$. Если, кроме того, функционал α_2 абсолютно непрерывен относительно функционала α_1 , то говорят, что функционалы α_1 и α_2 взаимно абсолютно непрерывны.

Замечание. Линейная оболочка системы взаимно абсолютно непрерывных функционалов пространства $C^*(X)$ состоит из взаимно абсолютно непрерывных функционалов. В самом деле, пусть $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$ является суммой двух взаимно абсолютно непрерывных функционалов α_1 и α_2 . По теореме Радона–Никодима $dv_{12} = dv_1 + dv_2 = (\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2)d\mu = \phi_3 d\mu_3$, где $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $d\mu_1 = \rho_1 d\mu$, $d\mu_2 = \rho_2 d\mu$, $d\mu_3 = \rho d\mu$, $\rho = |\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2|$, $\phi_3 = (\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2)/\rho$.

Пусть функционал α_4 абсолютно непрерывен относительно α_1 и α_2 . Тогда, если $A \subset \text{supp}(\mu_3)$ и $\mu_3(A) = 0$, то получаем $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ и, значит, $\mu_4(A) = 0$, т.е. функционал α_4 абсолютно непрерывен относительно α_3 . С другой стороны, пусть функционалы α_1 и α_2 абсолютно непрерывны относительно α_4 . Если $A \subset \text{supp}(\mu_4)$ и $\mu_4(A) = 0$, то $\mu_1(A) = \mu_2(A) = 0$ и, значит, $\mu_3(A) = 0$, т.е. функционал α_3 абсолютно непрерывен относительно α_4 .

Теорема 5. *Замкнутый клин $K \subset C(X)$ конечной коразмерности тогда и только тогда является чебышевским, когда для всех точек $p \in K$ и ненулевых функционалов $\alpha \in \nabla_p^\circ K$ выполняются следующие условия:*

- (a) функционал α является опорным в пространстве $C(X)$;
- (b) функционалы из $\nabla_p^\circ K$ взаимно абсолютно непрерывны;
- (c) множество $\text{zero}(\alpha) = X \setminus \text{supp}(\alpha)$ имеет не более, чем m_p точек;
- (d) система функций $\{\chi_x | x \in \text{zero}(\alpha)\}$ линейно не зависит от $\Pi_p K$ над полем \mathbb{F} .

Доказательство. *Необходимость.* Так как наибольшее подпространство клина $\Pi_0 K = K \cap (-K)$ имеет конечную коразмерность и функционал $\alpha \in \Pi_0^\perp K$, то условие (a) необходимо для того, чтобы клин обладал существованием [6, с. 649]. В силу теоремы 4 условия (c) и (d) необходимы для того, чтобы клин обладал свойством единственности. Докажем, что выполнено условие (b).

Предположим, что найдутся такие функционалы $\alpha_1, \alpha_2 \in \nabla_p^\circ K$, что функционал α_2 не является абсолютно непрерывным относительно α_1 . В силу замечания, сделанного перед теоремой, не ограничивая общности, можем предполагать, что функционал α_1 является окруженной точкой клина $\nabla_p^\circ K$. Поскольку клин K обладает свойством существования в пространстве $C(X)$, то каждый регулярный функционал из второго сопряженного пространства $C^{**}(X)$ имеет регулярную мажоранту на полярном* клине K° . Следовательно, для доказательства условия (b) необходимо построить такой регулярный функционал на пространстве $C^*(X)$, который не имеет регулярной мажоранты на полярном* клине K° [11, с. 26].

Пусть $dv_1 = \phi_1 d\mu_1$ и $dv_2 = \phi_2 d\mu_2$ представляющие меры для функционалов $\alpha_1, \alpha_2 \in C^*(X)$. По лемме 3 и условию (a) можно считать, что аргументы ϕ_1 и ϕ_2 непрерывны соответственно на носителях $\text{supp}(\mu_1)$ и $\text{supp}(\mu_2)$. В силу нашего предположения найдется борелевское множество $B \subset \text{supp}(\mu_1) \cap \text{supp}(\mu_2)$, т.ч. $\mu_1(B) = 0$ и $\mu_2(B) > 0$. Поскольку одно из множеств $\{x \in B | \text{Re } \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) \geq 0\}$ либо $\{x \in B | \text{Re } \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) \leq 0\}$ имеет положительной меры μ_2 , то мы можем считать для определенности, что действительная часть $\text{Re } \overline{\phi_1(x)} \phi_2(x) > 0$ при всех $x \in B$. Кроме того, будем предполагать далее, что нормы функционалов $\|\alpha_1\| = \mu_1(X) = 1$ и $\|\alpha_2\| = \mu_2(X) = 1$.

Определим функционал Φ с носителем в множестве $\text{supp}(\mu_1) \cup \text{supp}(\mu_2)$, заданный на клине K° , по формуле $\Phi(\alpha) \doteq \int_X f \phi d\mu$, где $dv \doteq \phi d\mu$ обозначает представляющую меру функционала $\alpha \in K^\circ$, а функция f равна $f(x) = \overline{\phi_1(x)}$ на множестве $x \in \text{supp}(\mu_1) \setminus B$ и равна $f(x) = -\overline{\phi_2(x)}$ на множествах $x \in B$ или $x \in \text{supp}(\mu_2) \setminus \text{supp}(\mu_1)$. Поскольку клин K° имеет конечную размерность, то функционал Φ является регулярным на линейной оболочке клина K° и имеет регулярное продолжение по линейности на все пространство $C^*(X)$. При этом его субнорма на клине K° равна $\|\Phi\|_{K^\circ} = \Phi(\alpha_1) = \mu(X) = 1$.

Предположим, что Φ имеет регулярную мажоранту $\widehat{\Phi}$ на клине K° с нормой $\|\widehat{\Phi}\| = 1$. Тогда найдется непрерывная функция $g \in C(X)$, что