



**ELEKTŘINA  
A MAGNETISMUS**  
BEDŘICH SEDLÁK  
IVAN ŠTOLL

KAROLINUM

# Elektřina a magnetismus

**Bedřich Sedlák**  
**Ivan Štoll**

---

Recenzoval:  
prof. RNDr. Petr Dub, CSc.

Vydala Univerzita Karlova  
Nakladatelství Karolinum  
Obálka Jan Šerých  
Sazba studio Lacerta ([www.sazba.cz](http://www.sazba.cz))  
Čtvrté vydání, v Nakladatelství Karolinum třetí  
První elektronické vydání

© Univerzita Karlova, 2017  
© Bedřich Sedlák, Ivan Štoll, 2017

ISBN 978-80-246-3146-2 (online : pdf)



Univerzita Karlova  
Nakladatelství Karolinum 2017

[www.karolinum.cz](http://www.karolinum.cz)  
[ebooks@karolinum.cz](mailto:ebooks@karolinum.cz)



# OBSAH

Předmluva .....	13
<b>I. Elektrostatika</b> .....	17
1.1 Elektrický náboj .....	17
1.1.1 Vlastnosti elektrického náboje .....	17
1.1.2 Coulombův zákon .....	20
1.1.3 Velikost elektrického náboje .....	23
1.1.4 Hustota elektrického náboje .....	25
1.1.5 Potenciální energie soustavy nábojů .....	27
1.1.6 Řešené příklady .....	29
a) Rovnováha soustavy statických nábojů .....	29
b) Elektrostatická energie iontového krystalu .....	31
1.2 Elektrostatické pole ve vakuu .....	32
1.2.1 Vektor intenzity elektrostatického pole bodových nábojů .....	32
1.2.2 Tok intenzity elektrostatického pole bodových nábojů .....	35
1.2.3 Potenciál elektrostatického pole bodových nábojů .....	38
1.2.4 Elektrostatické pole obecně rozložených nábojů .....	42
1.2.5 Gaussův zákon pro obecné elektrostatické pole .....	46
1.2.6 Nabitá plocha v elektrostatickém poli .....	48
1.2.7 Poissonova a Laplaceova rovnice .....	50
1.2.8 Hustota energie elektrostatického pole .....	51
1.2.9 Řešené příklady .....	52
a) Nabitá přímka .....	53
b) Nabitá rovina .....	54
c) Dvojice rovnoběžných nabitých rovin .....	56
d) Nabitá rovinná vrstva .....	57
e) Nabitá kulová slupka .....	58
f) Nabitá koule .....	59
g) Nabitá nekonečná válcová plocha a válec .....	60
h) Pole a potenciál na ose nabitě kružnice .....	61
i) Elektrostatické pole na ose válcové elektrody .....	62
j) Elektrostatické pole na ose kulového pásu .....	62
k) Elektrostatická energie nabitě koule .....	63
1.3 Elektrický dipól .....	64
1.3.1 Vlastnosti elektrického dipólu .....	64
*1.3.2 Multipólový rozvoj elektrostatického pole .....	70
*1.3.3 Elektrická dvojvrstva .....	74
*1.3.4 Objemové rozložení elektrických dipólů .....	76
1.3.5 Řešené příklady .....	79
a) Síla působící mezi dvěma elektrickými dipóly .....	79
b) Elektrický kvadrupólový moment elipsoidu .....	80

	c) Polarizovaný válec a rovinná vrstva . . . . .	81
	d) Polarizovaná koule . . . . .	83
1.4	Elektrostatické pole nabitých vodičů . . . . .	85
1.4.1	Vodiče a nevodiče . . . . .	85
1.4.2	Chování vodičů v elektrostatickém poli . . . . .	88
*1.4.3	Nepřímé ověření Coulombova zákona. . . . .	91
1.4.4	Základní úloha elektrostatiky . . . . .	95
1.4.5	Kapacita a kondenzátor. . . . .	98
1.4.6	Energie soustavy nabitých vodičů . . . . .	104
1.4.7	Řešené příklady . . . . .	108
	a) Bodový náboj a vodivá rovina. . . . .	108
	b) Kulové elektrostatické zobrazení . . . . .	110
	c) Vodivá koule v homogenním elektrostatickém poli . . . . .	112
	d) Kapacita kulového kondenzátoru . . . . .	113
	e) Kapacita válcového kondenzátoru . . . . .	113
	f) Kapacita dvoulinky. . . . .	114
	g) Mechanické napětí nabitých vodičů. . . . .	115
	h) Elektrostatické měřicí přístroje. . . . .	116
1.5	Elektrostatické pole v dielektrikách . . . . .	117
1.5.1	Dielektrika v elektrostatickém poli . . . . .	117
1.5.2	Polarizace dielektrika. . . . .	120
1.5.3	Gaussův zákon pro elektrostatické pole v dielektriku . . . . .	122
1.5.4	Materiálové vztahy, elektrická susceptibilita a permitivita. . . . .	124
*1.5.5	Energie elektrostatického pole v dielektriku. . . . .	127
1.5.6	Řešené příklady . . . . .	130
	a) Volné náboje a nabité vodiče v dielektriku . . . . .	130
	b) Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik . . . . .	131
	c) Dielektrická koule a elipsoid v homogenním elektrostatickém poli . . . . .	131
	d) Pole v dutině vytvořené v homogenním dielektriku . . . . .	133
	Úlohy ke kapitole I . . . . .	134
<b>2.</b>	<b>*Silové působení mezi pohybujícími se náboji. . . . .</b>	<b>139</b>
2.1	Základní vztahy relativistické mechaniky . . . . .	139
2.1.1	Einsteinův princip relativity . . . . .	139
2.1.2	Lorentzova transformace . . . . .	142
2.1.3	Relativistická dynamika . . . . .	145
2.2	Pole pohybujících se nábojů . . . . .	147
2.2.1	Pohybující se bodový náboj. . . . .	147
2.2.1	Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně malou rychlostí. . . . .	150
2.2.2	Pole náboje pohybujícího se rovnoměrně libovolnou rychlostí . . . . .	154
2.2.3	Pole náboje pohybujícího se libovolným způsobem . . . . .	163
2.2.5	Řešené příklady . . . . .	166
	a) Pole přímého nábojového paprsku. . . . .	166

b) Pole roviny vytvořené rovnoběžnými nábojovými paprsky . . . . .	167
c) Síly působící mezi nábojovými paprsky . . . . .	168
d) Transformace složek elektrického a magnetického pole . . . . .	170
<b>3. Stacionární pole . . . . .</b>	<b>175</b>
3.1 Elektrický proud . . . . .	176
3.1.1 Pojem elektrického proudu, hustota proudu . . . . .	176
3.1.2 Mechanismy vedení proudu. . . . .	179
3.1.3 Rovnice kontinuity proudu . . . . .	181
3.2 Stacionární elektrické pole a elektrický obvod. . . . .	182
3.2.1 Základní vlastnosti stacionárního elektrického pole. . . . .	182
3.2.2 Ohmův zákon pro homogenní vodiče. . . . .	184
3.2.3 Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče. . . . .	188
3.2.4 Kirchhoffova pravidla pro stacionární obvod . . . . .	192
3.2.5 Práce a výkon v elektrickém obvodu, Jouleův zákon . . . . .	194
3.2.6 Řešené příklady . . . . .	197
a) Podobnost elektrostatického a stacionárního elektrického pole . . . . .	197
b) Řazení odporů. . . . .	199
c) Transformace hvězda trojúhelník . . . . .	199
d) Výkonové přizpůsobení spotřebiče . . . . .	200
3.3 Stacionární magnetické pole . . . . .	201
3.3.1 Vektor magnetické indukce . . . . .	202
3.3.2 Ampèrov zákon pro magnetické pole ve vakuu . . . . .	204
3.3.3 Vektorový potenciál, Biotův-Savartův vzorec. . . . .	207
*3.3.4 Magnetické pole v místech s nenulovou hustotou proudu, pole plošných proudů . . . . .	213
3.3.5 Řešené příklady . . . . .	215
a) Magnetické pole přímého vodiče . . . . .	216
b) Magnetická indukce na ose kruhového závitu . . . . .	219
c) Magnetická indukce na ose solenoidu. . . . .	219
d) Magnetická indukce toroidu . . . . .	220
e) Vektorový potenciál homogenního pole a nekonečně dlouhého solenoidu. . . . .	222
3.4 Magnetický dipól . . . . .	223
3.4.1 Magnetický dipólový moment rovinné proudové smyčky . . . . .	224
3.4.2 Potenciální energie a silové účinky magnetického pole na magnetický dipól. . . . .	226
*3.4.3 Multipólový rozvoj magnetického pole. . . . .	227
*3.4.4 Objemové rozložení magnetických dipólů . . . . .	228
*3.4.5 Magnetická dvojrůstva . . . . .	230
3.4.6 Řešené příklady . . . . .	232
a) Magnetický dipólový moment nabitě částice konající rovnoměrný kruhový pohyb . . . . .	232

	b) Magnetický dipólový moment rotující nabitě koule . . . . .	233
3.5	Magnetické pole v látkách . . . . .	234
3.5.1	Chování látek v magnetickém poli . . . . .	234
3.5.2	Magnetická polarizace (magnetizace) látek, magnetizační proudy . . . . .	236
3.5.3	Ampèrov zákon v látkovém prostředí . . . . .	240
3.5.4	Materiálové vztahy, magnetická susceptibilita a permeabilita . . . . .	242
3.5.5	Magnetický obvod . . . . .	247
3.5.6	Magnetostatické pole . . . . .	250
3.5.7	Řešené příklady . . . . .	252
	a) Magnetické pole na rozhraní dvou prostředí . . . . .	252
	b) Toroidní jádro se vzduchovou mezerou . . . . .	253
	c) Koule v homogenním magnetickém poli . . . . .	255
	d) Elipsoid magnetovaný ve směru hlavní osy . . . . .	256
	Úlohy ke kapitole 3 . . . . .	258
<b>4.</b>	<b>Kvazistacionární elektrické a magnetické pole . . . . .</b>	<b>261</b>
4.1	Elektromagnetická indukce . . . . .	262
4.1.1	Zákon elektromagnetické indukce . . . . .	262
4.1.2	Souvislost mezi elektromagnetickou indukcí a silovými účinky magnetického pole . . . . .	265
	a) Pohyb přímého vodiče v homogenním magnetickém poli . . . . .	265
	b) Princip elektrického stroje . . . . .	266
	c) Princip fluxmetru . . . . .	269
4.1.3	Obecné vlastnosti kvazistacionárního pole . . . . .	271
4.1.4	Vlastní a vzájemná indukčnost vodičů . . . . .	275
4.1.5	Řešené příklady . . . . .	277
	a) Demonstrace platnosti Ampèrova zákona (měřicí transformátor) . . . . .	277
	b) Vlastní indukčnost přímých vodičů . . . . .	279
	c) Vlastní indukčnost kruhové smyčky . . . . .	280
	d) Vlastní indukčnost solenoidu . . . . .	281
	e) Vlastní indukčnost toroidu . . . . .	281
	f) Vzájemná indukčnost dvou sousých smyček . . . . .	282
	g) Vzájemná indukčnost dvojice sousých válcových cívek . . . . .	283
4.2	Kvazistacionární elektrický obvod . . . . .	284
4.2.1	Kirchhoffova pravidla pro kvazistacionární obvod . . . . .	284
4.2.2	Generace střídavého harmonického napětí, střídavé obvody . . . . .	289
4.2.3	Indukčně vázané obvody, transformátor . . . . .	294
4.2.4	Řešené příklady . . . . .	299
	a) Neustálený stav v obvodech s indukčností a kapacitou . . . . .	299
	b) Sériový rezonanční obvod . . . . .	301
	c) Vlastní kmity indukčně vázaných oscilačních obvodů . . . . .	304
4.3	Energie kvazistacionárního pole . . . . .	306
4.3.1	Zákon zachování energie v kvazistacionárních soustavách . . . . .	306



*4.3.2	Obecné vyjádření energie magnetického pole . . . . .	308
*4.3.3	Obecné vyjádření sil v magnetickém poli . . . . .	312
4.3.4	Řešené příklady . . . . .	314
a)	Síly působící mezi póly elektromagnetu . . . . .	314
b)	Hysterezní ztráty ve feromagnetiku . . . . .	315
c)	Střední hodnota výkonu ve střídavém obvodu . . . . .	316
d)	Magnetoelektrický měřicí přístroj . . . . .	317
	Úlohy ke kapitole 4 . . . . .	322
<b>5.</b>	<b>Elektromagnetické pole . . . . .</b>	<b>325</b>
5.1	Maxwellovy rovnice . . . . .	326
5.1.1	Indukované elektrické pole . . . . .	327
5.1.2	Magnetické pole posuvného proudu . . . . .	331
5.1.3	Úplná soustava Maxwellových rovnic . . . . .	334
5.1.4	Potenciály elektromagnetického pole . . . . .	338
5.2	Energie a hybnost elektromagnetického pole . . . . .	341
5.2.1	Poyntingova věta . . . . .	341
*5.2.2	Hybnost elektromagnetického pole . . . . .	344
*5.2.3	Termodynamické vztahy v přítomnosti elektromagnetického pole . . . . .	347
5.3	Elektromagnetické vlny . . . . .	352
5.3.1	Rovinná elektromagnetická vlna . . . . .	352
5.3.2	Monochromatická rovinná vlna . . . . .	356
*5.3.3	Vyzařování elektromagnetických vln . . . . .	359
5.3.4	Řešené příklady . . . . .	364
a)	Odraz a lom elektromagnetických vln . . . . .	364
b)	Tlak záření . . . . .	366
c)	Povrchový jev (skinefekt) . . . . .	367
5.4	*Lorentzovy rovnice . . . . .	369
5.4.1	Mikroskopický popis elektromagnetického pole . . . . .	371
5.4.2	Odvození Maxwellových rovnic z rovnic Lorentzových . . . . .	373
	Úlohy ke kapitole 5 . . . . .	375
<b>6.</b>	<b>Pohyb částice v elektromagnetickém poli . . . . .</b>	<b>377</b>
6.1	Nabitá částice v elektromagnetickém poli . . . . .	378
6.1.1	Pohybová rovnice . . . . .	378
*6.1.2	Energie a hybnost částice . . . . .	379
6.1.3	Pohyb v časově neproměnném homogenním poli . . . . .	382
a)	Homogenní elektrické pole . . . . .	382
b)	Homogenní magnetické pole . . . . .	383
c)	Vzájemně kolmé elektrické a magnetické pole . . . . .	385
*6.1.4	Pohyb v nehomogenním osově symetrickém magnetickém poli . . . . .	387
6.2	Pohyb gyromagnetické částice v magnetickém poli . . . . .	389
6.2.1	Pohybová rovnice . . . . .	389

6.2.2	Larmorova precese . . . . .	390
6.3	Příklady použití . . . . .	392
6.3.1	Principy částicové optiky . . . . .	392
6.3.2	Urychlovače nabitých částic . . . . .	396
	a) Elektrostatické urychlovače. . . . .	397
	b) Lineární (rezonační) urychlovač . . . . .	398
	c) Cyklotron . . . . .	398
	d) Betatron . . . . .	399
6.3.3	Hmotnostní spektroskopie . . . . .	401
6.3.4	Magnetická rezonance . . . . .	402
	Úlohy ke kapitole 6 . . . . .	404
<b>7.</b>	<b>Elektrické a magnetické vlastnosti látek . . . . .</b>	<b>407</b>
*7.1	Elektronová struktura látek. . . . .	408
7.1.1	Energie elektronů v atomech a molekulách . . . . .	408
7.1.2	Energie elektronů v kondenzovaných látkách . . . . .	414
7.1.3	Elektronový plyn . . . . .	416
7.1.4	Elektrické a magnetické momenty atomů a molekul . . . . .	419
7.2	Dielektrická a magnetická polarizace . . . . .	422
7.2.1	Dielektrika . . . . .	422
7.2.2	Diamagnetismus a paramagnetismus . . . . .	427
7.2.3	Magneticky uspořádané látky . . . . .	431
*7.2.4	Metamateriály . . . . .	435
7.3	Vedení proudu v pevných látkách . . . . .	435
7.3.1	Obecné charakteristiky vedení proudu v pevných látkách . . . . .	435
7.3.2	Vodivost kovů . . . . .	439
7.3.3	Kontaktní napětí a termoelektrické jevy v kovech . . . . .	443
7.3.4	Vlastní a příměsová vodivost polovodičů, vlastnosti přechodu <i>p-n</i> . . . . .	448
7.3.5	Supravodivost . . . . .	454
7.3.6	Elektronová emise. . . . .	459
7.3.7	Nenasycený emisní proud, princip elektronky . . . . .	462
7.4	Vedení proudu v kapalinách . . . . .	464
7.4.1	Měrná a molární vodivost roztoků . . . . .	464
7.4.2	Elektrolýza, Faradayovy zákony. . . . .	467
7.4.3	Elektrochemické procesy na elektrodách – elektrodové potenciály, galvanické články . . . . .	468
	a) Primární články . . . . .	472
	b) Sekundární články . . . . .	473
	c) Palivové články. . . . .	474
7.4.4	*Polarografie . . . . .	475
7.5	Vedení proudu v plynech . . . . .	476
7.5.1	Nesamostatná vodivost. . . . .	477
7.5.2	Doutnavý a obloukový výboj. . . . .	478

7.6	Základy teorie materiálových konstant . . . . .	481
7.6.1	Permitivita nepolárních látek (Clausiiův-Mosottiův vztah). . . . .	481
7.6.2	Langevinova teorie diamagnetismu atomů a molekul. . . . .	484
7.6.3	Susceptibilita nekovových paramagnetik, permitivita polárních látek (Langevinova teorie) . . . . .	486
	a) Magnetická susceptibilita paramagnetik . . . . .	486
	b) Permitivita polárních látek. . . . .	488
7.6.4	Obecné podmínky platnosti Ohmova zákona, fyzikální podstata Hallova jevu . . . . .	489
7.6.5	Drudeho teorie vodivosti kovů . . . . .	491
7.6.6	Výklad vodivosti roztoků . . . . .	494
7.6.7	Výklad nesamostatné vodivosti plynů, podmínky pro vznik samostatného výboje . . . . .	497
	Úlohy ke kapitole 7 . . . . .	499
<b>8.</b>	<b>Základy teorie elektrických obvodů . . . . .</b>	<b>503</b>
8.1	Základní pojmy . . . . .	503
8.1.1	Klasifikace elektrických obvodů a jejich prvků. . . . .	503
8.1.2	Základní vlastnosti elektrických dvojpólů a čtyřpólů . . . . .	506
	a) Dvojpól . . . . .	506
	b) Čtyřpól . . . . .	508
8.2	Stejnoseměrné a střídavé lineární obvody v ustáleném stavu . . . . .	510
8.2.1	Ohmův zákon a Kirchhoffova pravidla v komplexní symbolice . . . . .	510
8.2.2	Vlastnosti reálných dvojpólů . . . . .	514
	a) Náhradní schéma lineárního zdroje . . . . .	516
	b) Náhradní schéma kondenzátoru. . . . .	518
	c) Náhradní schéma cívky . . . . .	519
8.2.3	Věta o superpozici . . . . .	521
8.2.4	Obecné metody analýzy lineárních obvodů v ustáleném stavu . . . . .	522
	a) Přímá aplikace Kirchhoffových pravidel. . . . .	522
	b) Metoda smyčkových proudů. . . . .	524
	c) Metoda uzlových napětí . . . . .	527
8.2.5	Théveninova věta . . . . .	529
*8.2.6	Obvody se vzájemnou indukčností . . . . .	531
8.2.7	Řešené příklady . . . . .	534
	a) Sériové a paralelní rezonanční obvody . . . . .	534
	b) Wheatstonův můstek . . . . .	537
	c) Thomsonův dvojmost . . . . .	540
	d) Měření napětí a proudů v obvodech. . . . .	542
8.3	Vybrané typy obecnějších obvodů . . . . .	544
8.3.1	Nesinusové střídavé lineární obvody v ustáleném stavu. . . . .	544
8.3.2	Neustálený stav v lineárních obvodech. . . . .	548
8.3.3	Příklady řešení nelineárních obvodů . . . . .	548

a) Stabilizace napětí Zenerovou diodou . . . . .	550
b) Stanovení pracovního bodu tranzistoru . . . . .	551
c) Náhradní schéma linearizovaného čtyřpólu . . . . .	554
Úlohy ke kapitole 8 . . . . .	555
<b>Dodatek I Přehled vektorové analýzy . . . . .</b>	<b>559</b>
a) Skalární a vektorové veličiny . . . . .	559
b) Součiny vektorů . . . . .	561
c) Transformační vlastnosti vektorů . . . . .	564
d) Skalární a vektorová pole . . . . .	565
e) Gradient skalárního pole . . . . .	568
f) Divergence vektorového pole . . . . .	570
g) Rotace vektorového pole . . . . .	574
h) Operátory ( $\nabla$ ) a $\Delta$ . . . . .	577
i) Vektorová pole potenciální a solenoidální . . . . .	579
j) Některé integrální věty vektorové analýzy . . . . .	581
k) Úlohy k dodatku I . . . . .	582
<b>Dodatek 2 Soustavy fyzikálních jednotek . . . . .</b>	<b>583</b>
a) Charakteristiky soustav jednotek . . . . .	583
b) Vývoj elektrických a magnetických jednotek . . . . .	587
c) Přehled rovnic elektromagnetického pole v Gaussově soustavě . . . . .	591
d) Převodní vztahy jednotek elektrických a magnetických veličin v Mezinárodní a Gaussově soustavě . . . . .	593
e) Vybrané základní fyzikální konstanty . . . . .	600
<b>Historický přehled . . . . .</b>	<b>603</b>
Od Thaleta ke Gilbertovi . . . . .	603
Od Gilberta ke Coulombovi . . . . .	605
Od Coulomba k Ampèrovi . . . . .	608
Od Ampèra k Maxwellovi . . . . .	610
Od Maxwella k Einsteinovi . . . . .	614
Od Einsteina k dnešku . . . . .	618
Výzkum elektřiny a magnetismu v našich zemích . . . . .	623
<b>Výsledky a návody řešení úloh . . . . .</b>	<b>625</b>
<b>Literatura . . . . .</b>	<b>633</b>
<b>Rejstřík . . . . .</b>	<b>635</b>

# Předmluva k prvnímu elektronickému vydání

Pro předkládané první elektronické vydání učebnice byly odstraněny nedostatky předchozího vydání – vesměs formální povahy –, aktualizován historický přehled a doplněny odkazy na literaturu pro další studium některých kapitol.

Podobně jako v předchozích vydáních, i nyní plníme milou povinnost poděkovat pracovníkům Nakladatelství Karolinum za přípravu a realizaci vydání knihy.

*Bedřich Sedlák, Ivan Štoll (†)*

# Předmluva

První vydání této podrobné vysokoškolské učebnice elektřiny a magnetismu, jedné ze stěžejních součástí základního kurzu fyziky, vyšlo v roce 1993 jako společná publikace nakladatelství Academia a nakladatelství Univerzity Karlovy Karolinum. Její obsah a pojetí představuje syntézu přístupů a zkušeností obou autorů z výuky na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze a na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT.

Výklad je v učebnici veden induktivním způsobem; látka je rozdělena do osmi kapitol a každá z nich je doplněna i výběrem úloh k samostatnému řešení. Jelikož výuka daného oboru na potřebné vysokoškolské úrovni není možná bez použití metod vektorové analýzy, jejichž výklad je ve výuce matematiky obvykle zařazen do vyšších semestrů, je její stručný výklad podán v Dodatku 1. Dodatek 2 je věnován přehledu soustav fyzikálních jednotek používaných při měření elektrických a magnetických veličin a také přehledu fyzikálních konstant.

Základní linii výkladu tvoří makroskopické fenomenologické teorie, které ve 2. polovině 19. století vyvrcholily Maxwellovou teorií elektromagnetického pole. Jelikož se však od počátku 20. století zároveň bouřlivě rozvíjejí mikrofyzikální přístupy, jejichž základní složky tvoří kvantová mechanika, kvantová elektrodynamika a statistická fyzika, jsou tyto přístupy – alespoň orientačně – použity, a to

především v 7. kapitole; výklad je doplňován odkazy na příslušnou literaturu. Pro snazší orientaci čtenáře v textu jsou partie knihy, doplňující výklad o hlediska a postupy odlišné od hlavní linie výkladu, nebo partie, které doplňují výklad způsobem, jenž může být při prvním čtení vynechán, graficky odlišeny tak, že jsou buď označeny hvězdičkou (\*) (například kapitola 2, článek 5.2.3, oddíl 5.4, oddíl 7.1), nebo jsou vytištěny petitem. K pochopení souvislostí a pro představu o vývoji poznatků o elektrických a magnetických jevech je také na konec knihy zařazen *Historický přehled*.

Druhé, opravené, doplněné a aktualizované vydání, které vyšlo v roce 2002 v nakladatelství ACADEMIA s finanční podporou AV ČR a bylo připraveno s mimořádnou péčí pracovníků redakce přírodovědné literatury tohoto nakladatelství, zachovalo základní obsahové pojetí knihy i základní linii výkladu. V jednotlivostech se však druhé vydání od prvního nezanedbatelně lišilo. Kromě oprav nalezených chyb, zpřesnění některých formulací a doplnění a rozšíření řešených příkladů a úloh byly aktualizovány partie knihy, v jejichž oborech došlo k významnému posuvu stavu poznání; tyto úpravy se týkaly zejména 7. kapitoly a Historického přehledu. Modernizován a doplněn byl rovněž Dodatek 2, především s ohledem na poslední adjustaci základních fyzikálních konstant.

Jelikož je náklad 2. vydání učebnice již řadu let rozebrán, její potřeba je na obou zúčastněných fakultách velmi aktuální – a navíc si kniha v průběhu let od prvního vydání získala oblibu a je používána i na jiných fakultách – dochází proto k jejímu třetímu vydání, tentokrát znovu v Nakladatelství Karolinum, s dotací Univerzity Karlovy. Pro toto vydání byly opraveny nalezené chyby, znovu aktualizována zejména kapitola 7, Dodatek 2 a Historický přehled.

Je naší milou povinností poděkovat pracovníkům Nakladatelství Karolinum za vzornou přípravu a realizaci tisku. Náš nemenší dík patří všem, kdo nám pomohli při úpravách rukopisu třetího vydání i přípravě jeho tisku; především děkujeme recenzentovi prof. RNDr. Petru Dubovi, CSc., za mimořádně pečlivé provedení recenze i za připomínky a náměty, které velmi pomohly zvýšit kvalitu a aktualizaci obsahu učebnice. Dále děkujeme RNDr. Václavu Havlíčkovi, CSc., za spolupráci a mimořádnou vstřícnost při přípravě rukopisu do tisku.

*Bedřich Sedlák, Ivan Štoll*





# Elektrostatika

## I.1 ELEKTRICKÝ NÁBOJ

### I.1.1 VLASTNOSTI ELEKTRICKÉHO NÁBOJE

Na základě pokusů s elektrinou víme, že některá tělesa (například skleněná či ebonitová tyč po předchozím tření) mohou za určitých podmínek silově působit na jiná tělesa. Toto silové působení si vysvětlujeme přítomností *elektrických nábojů*. Elektrický náboj představuje pro nás výchozí fyzikální veličinu, přičemž mírou jejího množství a rozložení na příslušných tělesech je právě silové působení mezi nimi. Elektrický náboj je veličinou skalární, podobně jako hmotnost, a k jeho určení postačí jediná (reálná) číselná hodnota. Skutečnost, že síly elektrického působení mezi tělesy mohou být jak přitažlivé, tak odpuzivé, vysvětlujeme tím, že elektrický náboj může nabývat kladných i záporných hodnot – tělesa se souhlasným znaméním náboje se přitom odpuzují, tělesa s nesouhlasným znaméním náboje se přitahují. Tělesa, která nesou elektrický náboj, nazýváme *kladně či záporně nabitá*, tělesa o nulovém náboji jsou elektricky *neutrální*, nenabitá. Často se setkáváme s případem, kdy na tělesech jsou odděleně rozloženy kladné a záporné elektrické náboje o téže absolutní hodnotě. Taková tělesa budou také

elektricky silově působit, přestože jejich celkový elektrický náboj je nulový. Říkáme jim *polarizovaná*.

O přítomnosti elektrického náboje se přesvědčujeme pouze na základě jeho silového působení. Znamená to, že existenci jednoho jediného náboje bychom nemohli nijak odhalit. Kdyby existovaly pouze dva náboje, mohli bychom určit, zda jsou souhlasného či nesouhlasného znamení; nemohli bychom však rozhodnout ani o znamení, ani o velikosti těchto nábojů. Teprve jsou-li k dispozici alespoň tři náboje, můžeme jeden z nich vybrat jako jednotkový a kladný a ze silového působení určit velikost a znamení druhých dvou nábojů.

Co je vlastní podstatou elektrického náboje, nevíme. Na základě poznatků současné mikrofyziky jej můžeme považovat za jednu z *vlastností* některých elementárních částic, která podmiňuje jejich vzájemné působení. Rozlišujeme čtyři základní typy vzájemného působení (interakce) mezi elementárními částicemi: gravitační, slabé, elektromagnetické a silné. *Gravitační interakce* je univerzální a týká se všech částic. Setkali jsme se s ní v mechanice, její velikost udává Newtonův gravitační zákon a její podstatu se snaží objasnit obecná teorie relativity. *Slabá interakce* se projevuje u některých typů radioaktivního rozpadu za účasti neutrina. Podobně *elektromagnetická interakce* se uplatňuje mezi elementárními částicemi a jednou z jejich charakteristik je elektrický náboj. *Silná interakce* existuje mezi částicemi, které nazýváme hadrony, a drží pohromadě atomové jádro, které by se jinak odpudivými elektrickými silami působícími mezi protony muselo rozletět.

Současný rozvoj mikrofyziky naznačuje, že hadrony, které jsme dříve považovali za elementární, mají svoji strukturu a komponenty. Předpokládáme o nich, že jsou tvořeny tzv. *kvarky*. Na současné úrovni vystupují tedy jako elementární kvarky a leptony (k nim patří elektron, mion, tauon a odpovídající neutrina), jejich antičástice a dále pak částice, které zprostředkují interakci mezi nimi. U gravitační interakce jsou to dosud hypotetické gravitony, u slabé nedávno objevené intermediální bosony, u elektromagnetické fotony a u silné gluony [1].

Elementární částice vytvářejí složitější struktury, atomová jádra, atomy<sup>1</sup>, molekuly, jejichž vzájemné působení nabývá rovněž složitého charakteru. V denním životě se setkáváme s projevem působení gravitačního a elektromagnetického, které je ze všech nejlépe prozkoumáno. Nejen síly elektrostatické a elektrodynamické, ale i magnetické, optické, chemické a biologické jevy, chemické vazby a uvolňování chemické energie, mezimolekulární síly podmiňující soudržnost těles, přilnavost a tření, síly svalové kontrakce, tepelné působení slunečního záření a mnoho dalších jevů má svůj původ ve vzájemném působení elektrických nábojů.

Síly elektromagnetického působení mohou být přitažlivé i odpudivé, mohou složitým způsobem záviset na vzdálenosti, směru v prostoru a vzájemné poloze těles, na rychlosti jejich pohybu, vlastnostech prostředí, obecně nemusí působit ve směru spojnice interagujících těles, a dokonce nemusí ani splňovat Newtonův zákon akce a reakce.

Elektrický náboj má některé základní vlastnosti, které vyplývají z experimentálních pozorování a uplatňují se i při vzájemné interakci nabitých částic. Tyto vlastnosti vyjadřuje:

---

1 Objevitelem atomu je anglický fyzik *Ernest Rutherford*, který úspěšně interpretoval výsledky rozptylu  $\alpha$  částic H. Geigera a Marsdena (Proc. Roy. Soc. 82 (1909) 495); jeho základní práce byla publikována v Phil. Mag. 21 (1911), str. 669.

1. **Zákon zachování náboje.** *Elektrický náboj je nestvořitelný a nezničitelný.* Jinak řečeno, celkové množství elektrického náboje v elektricky izolované soustavě (jejíž hranici nemohou procházet náboje) zůstává neměnné. Dochází-li ke srážkám částic, je celkový náboj před reakcí roven celkovému náboji po reakci. První experimentální důkaz tohoto zákona podal Faraday v r. 1843 elektrometrickým měřením náboje nabitě koule v izolovaném prostoru. Matematické vyjádření tohoto zákona je dáno tzv. rovnicí kontinuity proudu, kterou uvedeme v článku 3.1.3.

2. **Zákon invariantnosti náboje.** *Velikost elektrického náboje se při pohybu nemění.* Jinak řečeno, při všech transformacích vztažné soustavy zůstává velikost náboje invariantní. Takovou vlastnost má jen málo fyzikálních veličin; například hmotnost částice roste jak známo s rychlostí.

Jedním z experimentálních argumentů svědčících o invariantnosti náboje je skutečnost, že atomy a molekuly jsou elektricky neutrální. Atom helia a molekula těžkého vodíku  $D_2$  jsou tvořeny týmiž částicemi – dvěma protony, dvěma neutrony a dvěma elektrony. Pohyb nabitých částic v těchto dvou soustavách je jistě podstatně odlišný a přitom obě zůstávají elektricky neutrální. V šedesátých letech 20. století byly prováděny přesné pokusy s odchylováním svazků atomů cesia a molekul vodíku v silném elektrickém poli, které prokázaly, že atomy jsou elektricky neutrální s přesností na dvacet desetinných míst velikosti elementárního náboje.<sup>2</sup>

3. **Zákon kvantování náboje.** *Existuje nejmenší, dále nedělitelný elektrický náboj, který nazýváme elementárním, a všechny elektrické náboje mají velikost, která je jeho celistvým násobkem.* Tento atomismus elektřiny souvisí s tím, že elektrický náboj je vlastností částic látky. Velikost elementárního náboje je možné určit pomocí celé řady experimentů, např. klasického Millikanova pokusu (1911), viz článek 1.1.3.

Kladný elementární náboj má například proton, který patří mezi hadrony. Kvarky jako komponenty hadronů mají podle předpokladů náboje o velikosti jedné třetiny a dvou třetin elementárního náboje. Tato okolnost však nemění nic na faktu kvantování náboje.

Pokud jde o vlastnosti nabitých částic, jsou pozoruhodné ještě dvě okolnosti. Jednou z nich je existence *částic a antičástic*. Ke každé částici existuje antičástice, které se vzájemně liší znamením elektrického náboje.<sup>3</sup> Protože elektrické síly závisejí pouze na souhlasnosti či nesouhlasnosti znamení náboje, mohla by existovat antilátka, kde by nukleony v atomových jádrech byly nahrazeny antinukleony a elektrony atomových obalů svými antičásticemi – pozitrony. Tyto úvahy mají velký význam i pro kosmologii a vyjadřují jednu ze základních symetrií přírody.

Druhá ze zmíněných okolností je *nábojová kvazineutralita* vesmíru. V dostatečně velkých objemech se celkový počet kladných i záporných nábojů vždy

---

2 J. C. Zorn et al. Phys. Rev. 129 (1963), str. 2566, J. G. King, Phys. Rev. Lett. 5 (1960), str. 562.

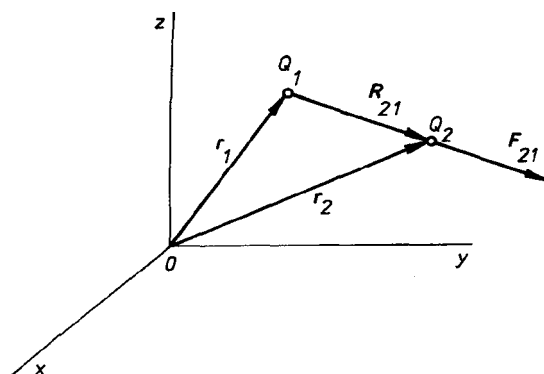
3 Částice a antičástice se liší též znaménkem magnetického momentu a některých dalších tzv. kvantových čísel (leptonový a baryonový náboj, podivnost, půvab aj.), která charakterizují jejich vzájemné interakce. Existuje několik částic, které jsou se svými antičásticemi totožné (například foton) [1].

vyrovnává a látka, jak se s ní běžně setkáváme v tuhém, kapalném a plynném skupenství, se jeví elektricky neutrální. Odchytky od elektrické neutrality v makroskopických měřících se projevují elektrickými silami, které se opět snaží elektrickou neutralitu obnovit.

### 1.1.2 COULOMBŮV ZÁKON

Při kvantitativním popisu silového působení mezi makroskopickými nabitými tělesy je výhodné v prvním přiblížení abstrahovat od způsobu rozložení náboje v objemu tělesa. Můžeme zavést pojem *bodového náboje*, který je analogický pojmu hmotného bodu v mechanice. Za bodový náboj můžeme tedy považovat nabitě těleso, jehož rozměry jsou zanedbatelně malé ve srovnání se vzdálenostmi, na nichž silové působení uvažujeme.

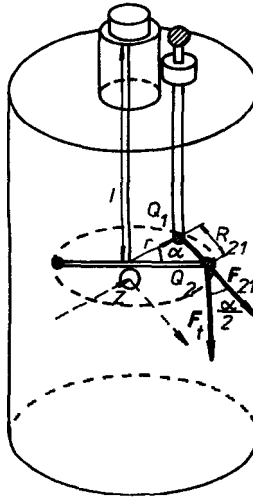
Dvojice bodových nábojů o velikostech  $Q_1$ ,  $Q_2$ , které jsou umístěny ve vakuu v bodech o polohových vektorech  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  a které jsou nehybné v dané inerciální soustavě souřadnic (obr. 1.1), tvoří nejjednodušší makroskopickou soustavu, na níž je možné silové působení mezi náboji studovat. Experimenty tohoto druhu provedl r. 1785 Ch. A. Coulomb s použitím torzních vah, které představují jeden z nejcitlivějších fyzikálních přístrojů.



Obr. 1.1 K vzájemnému silovému působení dvou bodových nábojů.

Sílu působící mezi dvěma malými nabitými kuličkami lze měřit z úhlu zkrutu  $\alpha$  dlouhého a tenkého vlákna délky  $l$  a poloměru průřezu  $R$ . Úhel  $\alpha$  se zjišťuje odrazem světelného paprsku od zrcátka  $Z$  spojeného s vláknem. Na konci vlákna je zavěšeno vodorovné vahadélko s malými stejnými kuličkami na koncích. Jedna z těchto pohyblivých kuliček nesoucí elektrický náboj  $Q_2$  se ustálí v rovnovážné poloze vůči nehybné kuličce o náboji  $Q_1$  ve vzdálenosti  $R_{21}$  (viz obr. 1.2). Jak uvidíme později, nabitá kulička se navenek chová tak, jakoby elektrický náboj byl umístěn v jejím středu a popsané uspořádání tedy umožňuje měřit síly působící mezi bodovými náboji. Moment tangenciální síly  $\mathbf{F}_t$  se musí rovnat torznímu momentu  $\mathbf{D}$  takže platí

$$rF_t = D = \frac{\pi GR^4}{2l} \alpha \quad (1.1)$$



Obr. 1.2 Coulombovy torzní váhy.

( $r$  je délka ramene torzních vah,  $G$  modul smyku materiálu vlákna), a tedy

$$F_{21} = \frac{F_t}{\cos \alpha / 2} = \frac{D}{r \cos \alpha / 2}. \quad (1.2)$$

Na základě výsledků těchto experimentů lze formulovat vztah vyjadřující sílu  $\mathbf{F}_{21}$ , kterou náboj  $Q_1$  působí na náboj  $Q_2$ . Tento vztah, vyjadřující *Coulombův zákon*, lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{Q_1 Q_2}{R_{21}^3} \mathbf{R}_{21}, \quad (1.3)$$

v němž  $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  a  $R_{21}$  je velikost vektoru  $\mathbf{R}_{21}$ . Obráceně sílu  $\mathbf{F}_{12}$ , kterou působí náboj  $Q_2$  na náboj  $Q_1$ , dostaneme záměnou indexů 1 a 2 ve vztahu (1.3). Platí tedy  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$  v souladu s Newtonovým principem akce a reakce. Síly mezi bodovými náboji působí podél jejich spojnice – takové síly nazýváme *centrálními*. Změní-li se znaménko součinu  $Q_1 Q_2$ , změní se pouze směr síly a nikoli její velikost. Kladné znaménko tohoto součinu odpovídá přitom síle odpudivé, záporné znaménko síle přitažlivé.

Velikost síly působící mezi dvojicí bodových nábojů je rovna

$$F = |\mathbf{F}_{21}| = |\mathbf{F}_{12}| = k \frac{|Q_1 Q_2|}{R_{21}^2}. \quad (1.4)$$

Tato velikost klesá se čtvercem vzdálenosti obou nábojů (stejně jako gravitační působení dvou hmotných bodů) a nezávisí na směru v prostoru. Coulombovy síly jsou tedy *izotropní*.

Všimneme si nyní poněkud obecnější úlohy. Předpokládejme, že v bodech o polohových vektorech  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  jsou rozloženy bodové náboje  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Necht' dále v bodě o polohovém vektoru  $\mathbf{r}$  je umístěn bodový náboj  $Q$ . Ptáme se, jaká síla  $\mathbf{F}$  bude na náboj  $Q$  působit. Abychom na tuto otázku mohli odpovědět, musíme vědět, jak se změní silové působení mezi dvojicí bodových nábojů, budou-li v prostoru rozmístěny ještě náboje další.

Experimentální zkušenost ukazuje, že silové působení mezi danou dvojicí nábojů je na přítomnosti dalších nábojů nezávislé. Podle věty o skládání sil, známé z mechaniky, můžeme proto celkovou sílu  $\mathbf{F}$  působící na náboj  $Q$  vyjádřit jako vektorový součet sil  $\mathbf{F}_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) vyvolaných jednotlivými náboji  $Q_1$  až  $Q_N$ . Podle (1.3) bude tedy platit

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = kQ \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i, \quad (1.5)$$

přičemž  $\mathbf{R}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$ .

Elektrostatické síly působící mezi dvojicemi bodových nábojů jsou tedy nezávisle aditivní. Toto tvrzení je obsahem *principu superpozice*, podle něhož se jednotlivé síly (popř. jiné fyzikální veličiny) vzájemně neovlivňují, superponují se a lze je sčítat. Jde o neobyčejně významný princip, s nímž se setkáváme i v jiných oblastech fyziky u tzv. lineárních jevů. Umožňuje nám určovat silové působení těles s libovolným rozložením elektrických nábojů. Je vlastně součástí formulace Coulombova zákona, neboť umožňuje použít vztah (1.3) i za přítomnosti nábojů dalších.

Přesnost Coulombových měření byla řádově několik procent. Existují však další, mnohem přesnější nepřímé metody experimentálního ověření platnosti Coulombova zákona, založené na vlastnostech rozložení elektrických nábojů na vodičích. Této metody využil již H. Cavendish r. 1772, své výsledky však nepublikoval a upozornil na ně teprve J. C. Maxwell r. 1879. Podrobněji bude o této metodě zmínka v článku 1.4.3.

V pozemském makroskopickém měřítku je platnost Coulombova zákona experimentálně potvrzena mimo pochybnost. Vzniká samozřejmě otázka o mezích platnosti tohoto zákona, budou-li elektrostatické síly a vzdálenosti nábojů příliš velké nebo příliš malé. Pokusy s rozptylem nabitých částic prokázaly platnost Coulombova zákona až na vzdálenostech odpovídajících rozměrům  $10^{-17}$  m. Astrofyzikální poznatky, především skutečnost, že elektromagnetické vlnění neprojevuje disperzi při šíření ve vakuu a že foton má nulovou klidovou hmotnost, svědčí o tom, že platnost Coulombova zákona není omezena ani velkými vzdálenostmi dostupnými našemu pozorování.

Coulombův zákon spolu s principem superpozice má pro elektrostatiku charakter základního zákona a v jistém smyslu vyčerpává její obsah. Umožňuje určit

silové působení libovolně rozložených elektrických nábojů a spolu se zákony mechaniky též podmínky rovnováhy nabitých těles. Centrální a izotropní charakter Coulombových sil je důsledkem obecného *principu symetrie* – nehybný bodový náboj v prostoru můžeme považovat za střed kulové symetrie, dvojice bodových nábojů udává jediný význačný směr daný jejich spojnicí. Vlastním fyzikálním obsahem Coulombova zákona je tedy především závislost poklesu velikosti síly na vzdálenosti podle zákona převráceného čtverce.

Stojí za zmínku, že Coulomb prováděl analogické experimenty též s dlouhými tenkými tyčovými magnety a našel tak analogický „Coulombův zákon pro magnetické náboje“. Později se však ukázalo, že samostatné „magnetické náboje“ neexistují. K této otázce se vrátíme v kapitole 3.

### 1.1.3 VELIKOST ELEKTRICKÉHO NÁBOJE

Coulombův zákon slouží zároveň jako definiční vztah nové fyzikální veličiny, elektrického náboje, i jeho míry. Z hlediska formální logiky by se mohlo zdát, že tak ztrácí charakter zákona. Nesmíme však zapomenout na to, že fyzika, na rozdíl od matematiky, pracuje se základními pojmy, které jsou vlastnostmi reálných objektů a jejichž existence není otázkou logiky, nýbrž experimentální zkušenosti. Chápe-li zavedení elektrického náboje tímto způsobem, můžeme dále rozvíjet fyzikální teorii pomocí matematického a logického formalismu.

Volbou konstanty úměrnosti  $k$  v Coulombově zákoně (1.3) nebo (1.4) stanovíme jednotku velikosti elektrického náboje. V dalším výkladu budeme mluvit pouze o elektrickém náboji a ze souvislosti bude zřejmé, zda jde o fyzikální vlastnost nebo její kvantitativní určení, velikost.

Fyzikální jednotky tvoří, jak známo, koherentní soustavy založené na několika jednotkách základních, z nichž jsou ostatní odvozovány. Dnes je u nás uzákoněna Mezinárodní soustava jednotek SI, která se stále více uplatňuje ve vědě i v praxi (viz Dodatek 2). Mezi základními jednotkami této soustavy je jednotka elektrického proudu *ampér*. Jednotkou elektrického náboje je pak *ampérsekunda* zvaná též *coulomb* (C). Abychom zachovali soulad se základními jednotkami Mezinárodní soustavy, musíme v Coulombově zákonu položit

$$k = c^2 \cdot 10^{-7} \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \doteq 0,8988 \cdot 10^{10} \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (1.6)$$

Zdůvodnění této volby podáváme v článku 3.3.2, kde uvidíme, jak souvisí s volbou základních jednotek Mezinárodní soustavy. Všimněme si, že námi zvolená konstanta  $k$  je vyjádřena prostřednictvím univerzální konstanty  $c$  (rychlost světla ve vakuu). Konstanta  $k$  se obvykle zapisuje ve tvaru

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

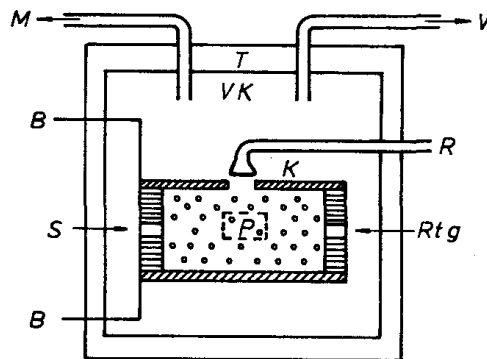
kde (srov. Dodatek 2)

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \doteq 8,854 \cdot 10^{-12} \text{Fm}^{-1}. \quad (1.8)$$

Nově zavedená konstanta  $\varepsilon_0$  (epsilon nula) má tedy rovněž charakter univerzální fyzikální konstanty a nazývá se *permitivita vakua*. Její fyzikální význam bude objasněn později. Rovněž jednotka *farad*  $\text{F} = \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-1}$  bude zavedena později jako jednotka kapacity.

Nyní se můžeme zeptat, jakou velikost má *elementární náboj*. Přímou metodou byla změřena R. A. Millikanem r. 1911; Millikanův experiment je zároveň i důkazem atomismu elektřiny (kvantování náboje).

Velikost elementárního náboje  $e$  lze určit porovnáním sil, kterými působí elektrostatické a gravitační pole na malá nabitá tělíška. Mezi desky kondenzátoru jsou vstříkovány olejové kapičky a mikroskopem je sledován jejich vertikální pohyb v přítomnosti elektrického pole a bez něho. Uspořádání experimentu je patrné z obr. 1.3.



Obr. 1.3 Uspořádání Millikanova pokusu:  $T$  – termostat,  $VK$  – vakuová komora,  $K$  – kondenzátor,  $S$  – osvětlení,  $P$  – pozorovací okénko,  $Rtg$  – zdroj ionizujícího záření,  $R$  – rozprašovač olejových kapiček,  $B$  – baterie,  $V$  – vývěva,  $M$  – manometr.

Označme  $r$  poloměr kapky,  $q$  náboj kapky,  $\sigma$  hustotu oleje,  $\rho$  hustotu vzduchu při daném tlaku,  $\eta$  dynamickou viskozitu vzduchu,  $v_g$ ,  $v_E$  vertikální rychlosti kapek při vypnutém a zapnutém napětí na kondenzátoru. Síla tření při pohybu kulových kapiček ve zředěném plynu je dána Stokesovým vzorcem  $F_S = 6\pi\eta r v$  a roste se stoupající rychlostí tak dlouho, až se pohyb kapky stane rovnoměrným. Potom máme pro celkovou sílu působící na kapku při vypnutém kondenzátoru

$$F_g = mg - m'g - 6\pi\eta r v_g = 0, \quad (1.9)$$

kde  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \sigma$ ,  $m' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ .



Při zapnutém kondenzátoru působí na tutéž kapku síla

$$F_E = qE - mg - m'g - 6\pi\eta r v_E = qE - 6\pi\eta r(v_g + v_E) = 0. \quad (1.10)$$

Z těchto dvou rovnic určíme poloměr kapky (obtěžně měřitelný) a velikost náboje

$$r = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\eta v_g}{(\sigma - \rho)}}, \quad q = \frac{6\pi\eta r}{E} (v_g + v_E). \quad (1.11)$$

Proměřováním rychlosti pohybu mnoha kapek zjistíme, že jejich náboje jsou malými násobky určitého minimálního, elementárního náboje, který tak můžeme určit.

Jsou-li rozměry kapek srovnatelné s délkou volné dráhy molekul  $\lambda$ , je třeba Stokesovu sílu  $F_S$  dělit výrazem  $1 + A(\lambda/r) = 1 + (B/pr)$ , kde  $p$  je tlak plynu a  $A, B$  neznámé konstanty. Znalost těchto konstant není však nutná. Určíme-li elementární náboj pro různé hodnoty tlaku  $p$  a vynásobíme-li lineární závislosti mezi  $q^{2/3}$  a  $1/pr$ , můžeme opravenou hodnotu určit extrapolací.

Millikanův experiment byl mnohokrát opakován; A. F. Ioffe změřil r. 1912 obdobným způsobem náboj elektronů uvolňovaných při fotoelektrickém jevu.

Přesněji lze určovat měrný náboj částic  $q/m$  ( $q$  je náboj,  $m$  klidová hmotnost částice). Lze k tomu použít například vlastností pohybu nabitých částic v elektrických a magnetických polích (viz kapitola 6).

Známe-li velikost náboje, který při elektrolýze vyloučí jeden mol jednovazných iontů nesoucích po jednom elementárním náboji (tj. Faradayův náboj  $F$  – viz článek 7.4.2), a počet těchto iontů v jednom molu (tj. Avogadrova konstanta  $N_0$ ), najdeme velikost elementárního náboje  $e$  jako poměr dvou konstant:

$$F = 9,649 \cdot 10^4 \text{ C mol}^{-1}, \quad N_0 \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1},$$

$$e = \frac{F}{N_0} \doteq 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (1.12)$$

Poznamenejme, že klidová hmotnost elektronu je  $m_e \doteq 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , a jeho měrný náboj tedy  $-e/m_e \doteq -1,759 \cdot 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ . (Podrobněji o metodách určování elementárního náboje viz [2].)

#### 1.1.4 HUSTOTA ELEKTRICKÉHO NÁBOJE

Při zkoumání elektrických sil nemáme zpravidla co činit s jednotlivými bodovými či elementárními náboji, ale s nabitými makroskopickými tělesy. Jde tedy o velké soubory nabitých částic, které jsou rozloženy v objemu, popř. na povrchu tělesa, s velkou hustotou tak, že toto rozložení můžeme považovat za spojitě. Nejde zde

ovšem o spojitost v matematickém smyslu, nýbrž ve smyslu fyzikálním: zvolíme-li „nekonečně malý“ (diferenciální) objem nabitého tělesa, budeme stále předpokládat, že obsahuje velké množství elementárních nábojů, takže se neprojeví kvantování náboje.

Podobně, jako jsme zaváděli pojem hustoty v souvislosti s rozložením hmotnosti v mechanice, můžeme zavést pojem *objemové hustoty náboje*  $\rho$ . Uvažujme těleso libovolného tvaru o objemu  $V$ , které je v klidu vůči dané inerciální soustavě. Předpokládejme, že toto těleso nese náboj  $Q$ , jehož rozložení po celém objemu tělesa je časově neproměnné. Okamžitě můžeme definovat střední objemovou hustotu náboje jako poměr

$$\bar{\rho} = \frac{Q}{V}. \quad (1.13)$$

Zvolme nyní v objemu tělesa bod  $A$  polohy  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$  a obklopme tento bod objemem  $\Delta V$ . Objem  $\Delta V$  nese náboj  $\Delta Q$ . Objem  $\Delta V$  budeme libovolným způsobem zmenšovat tak, aby stále obsahoval bod  $A$ , a budeme předpokládat, že existuje limita nezávislá na způsobu zmenšování objemu  $\Delta V$

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}. \quad (1.14)$$

Funkci  $\rho(\mathbf{r})$  nazveme objemovou hustotou náboje v daném bodě. Náboj tělesa objemu  $V$  charakterizovaného objemovou hustotou náboje  $\rho$  najdeme jako

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.15)$$

Naopak vztah (1.15) můžeme též považovat za definici objemové hustoty náboje  $\rho$ . Náboj malého objemu  $\Delta V$  můžeme přibližně vyjádřit vztahem

$$\Delta Q \doteq \rho(\mathbf{r}') \Delta V, \quad (1.16)$$

kde  $\mathbf{r}'$  je polohový vektor libovolného bodu objemu  $\Delta V$ ; pro nekonečně malý (diferenciální) objem bude vztah (1.16) platit přesně. Ve zvláštním případě rovnoměrného rozložení náboje je  $\rho$  konstanta a integrál (1.15) se redukuje na vztah<sup>4</sup>

$$Q = \rho V. \quad (1.17)$$

Kromě uvažovaného rozložení náboje v objemu je myslitelné uvažovat rozložení náboje na geometrických útvarech jiného typu. Pro náboje rozložené na dané

---

4 *Poznámka o diferenciálních a integrálních veličinách:* Při popisu fyzikálních jevů a formulaci fyzikálních zákonů budeme používat jednak diferenciálního a jednak integrálního tvaru. Diferenciální veličiny jsou přitom definovány jako funkce daného bodu prostoru, zatímco integrální veličiny jsou vázány na předem zadané těleso (plochu, křivku). Náboj  $Q$  je tedy veličinou integrální, objemová hustota náboje  $\rho$  veličinou diferenciální.

ploše  $S$  dospějeme obdobným limitním přechodem k pojmu *plošné hustoty náboje*  $\sigma(\mathbf{r})$ . Náboj na ploše  $S$  charakterizované plošnou hustotou náboje  $\sigma$  je pak

$$Q = \int_S \sigma(\mathbf{r}) dS, \quad (1.18)$$

ve zvláštním případě rovnoměrného rozdělení náboje

$$Q = AS. \quad (1.19)$$

Podobně je možné uvažovat rozložení náboje na křivce. V tomto případě zavedeme pojem *lineární hustoty náboje*. Náboj na křivce délky  $l$  charakterizované lineární hustotou náboje  $\tau$  je

$$Q = \int_l \tau(\mathbf{r}) dl, \quad (1.20)$$

v případě rovnoměrného rozložení náboje

$$Q = \tau l. \quad (1.21)$$

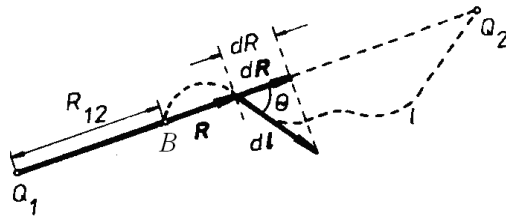
Názorný význam všech zavedených hustot náboje je zřejmý. Každá z nich vyjadřuje velikost náboje, který v okolí daného bodu připadá na jednotkovou míru daného útvaru. Pro jednotky těchto veličin v Mezinárodní soustavě máme  $(\rho) = \text{C m}^{-3}$ ,  $(\sigma) = \text{C m}^{-2}$ ,  $(\tau) = \text{C m}^{-1}$ . Jde tedy o fyzikálně různé veličiny, které, jak uvidíme, mají též různé vlastnosti, zejména v oblastech přechodu od nulových k nenulovým hustotám. Je ovšem třeba vidět, že ve skutečnosti rozložení nábojů nemůže být nikdy dvojrozměrné či jednorozměrné v matematickém smyslu. Pro účely makroskopického popisu je však výhodné mikrofyzikální strukturu rozložení nábojů pominout.

### 1.1.5 POTENCIÁLNÍ ENERGIE SOUSTAVY NÁBOJŮ

Vraťme se k obecné soustavě bodových nehybných nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  rozmístěných ve vakuu v bodech  $\mathbf{r}_1$  až  $\mathbf{r}_N$ . Tyto náboje na sebe působí Coulombovými elektrostatickými silami, a mají-li zůstat nehybné, musí být na svých místech nějakým způsobem udržovány. Dále je zřejmé, že při vytváření takové soustavy musí vnější síly překonávat síly Coulombovy, a musí tedy konat práci. Práce vnějších sil  $A$  (která je rovna záporně vzaté práci vykonané Coulombovými silami) odpovídá *elektrostatické potenciální energii soustavy nábojů*. Nezbytným předpokladem pro praktickou použitelnost této veličiny ovšem je, aby nebyla závislá na způsobu vytváření soustavy, tj. na pořadí a způsobu pohybu nábojů z počátečních do konečných poloh. Potenciální energie pak může být považována za charakteristiku této soustavy. Přesvědčíme se nyní o této důležité vlastnosti.

Začneme s jedním izolovaným bodovým nábojem  $Q_1$ . Je-li druhý bodový náboj  $Q_2$  nekonečně vzdálen, bude síla mezi nimi působící nekonečně malá a potenciální energii takové dvojice nábojů můžeme položit rovnu nule. Budeme nyní přibližovat náboj  $Q_2$  nejkratší cestou po přímce směřující k náboji  $Q_1$ , až se náboj  $Q_2$  zastaví v bodě  $B$  ve vzdálenosti  $R_{12}$  od náboje  $Q_1$ . Přitom jsme při překonávání Coulombovy síly (1.1) vykonali práci  $W$  rovnou

$$W = \int_{\infty}^{R_{12}} F_{21} dR = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} = \int_{\infty}^{R_{12}} \frac{dR}{R^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}}. \quad (1.22)$$



Obr. 1.4 K odvození energie soustavy dvou bodových nábojů.

Budeme-li náboj  $Q_2$  přibližovat po libovolné dráze  $l$  (obr. 1.4), dostaneme

$$W = \int_l \mathbf{F}_{21} \cdot d\mathbf{l} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}}{R^3} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{R \cos \theta}{R^3} dl, \quad (1.23)$$

tj. stejný výsledek jako v předchozím případě, neboť  $dR = \cos \theta dl$ .

Výsledná práce tedy nezávisí na způsobu sblížení nábojů. Přiblíží-li se k této dvojici třetí náboj  $Q_3$ , bude podle principu superpozice výsledná potenciální energie rovna

$$A = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} + \frac{Q_1 Q_3}{R_{13}} + \frac{Q_2 Q_3}{R_{23}} \right). \quad (1.24)$$

Obecně pro soustavu  $N$  bodových nábojů můžeme napsat

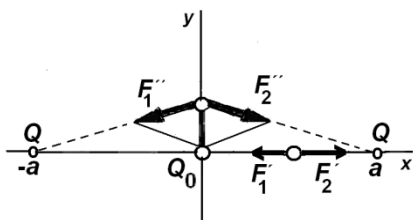
$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i Q_j}{R_{ij}}. \quad (1.25)$$

Sčítáme přes všechna vzájemně různá  $i$  a  $j$ , takže se každá dvojice nábojů uvažuje dvakrát, a proto je třeba doplnit navíc činitel  $1/2$ . Samozřejmě platí  $R_{ij} = R_{ji} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ . Získaná potenciální energie charakterizuje výsledný stav soustavy bodových nábojů a může být kladná, záporná i nulová.

## I.1.6 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

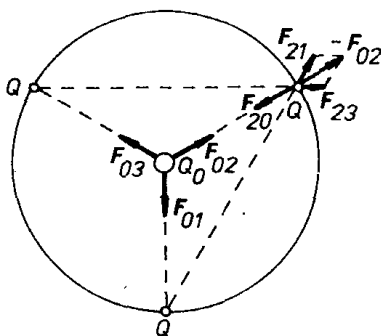
### a) Rovnováha soustavy statických nábojů

Snadno se přesvědčíme, že existují taková uspořádání kladných a záporných elektrických nábojů v prostoru, kdy na každý z nábojů působí nulová výslednice Coulombových sil. Mějme například kladný bodový náboj  $Q_0$  umístěn v počátku kartézské soustavy souřadnic a dva záporné stejně velké bodové náboje  $Q$  na ose  $x$  v bodech o souřadnicích  $x = a$  a  $x = -a$  (obr. 1.5). Na centrálně umístěný náboj  $Q_0$  působí ze strany druhých dvou nábojů zřejmě nulová výslednice sil. Zvolíme-li  $Q_0 = -Q/4$ , budou i výsledné síly působící na náboje  $Q$  nulové. Všechny tři náboje jsou tedy v rovnováze.



Obr. 1.5 Rovnováha soustavy nábojů rozložených na přímce.

Podobně uvažujme náboj  $Q_0$  umístěný ve středu kružnice o poloměru  $R$  a  $n$  bodových nábojů  $Q$  rozmístěných symetricky po obvodu této kružnice. Situace pro  $n = 3$  je znázorněna na obr. 1.6. Opět je zřejmé, že síly  $F_{01}, F_{02}, F_{03}$  působící na centrální náboj se z důvodu symetrie vyruší a vhodnou volbou velikostí nábojů lze dosáhnout toho, že i síly působící na náboje  $Q$  budou nulové. Příkladně-li velikost výslednice odpuzivých sil působící na náboj  $Q$  ze strany ostatních obvodových nábojů a přitažlivé síly centrálního náboje, snadno najdeme, že pro  $n = 2$  musí platit  $Q_0 = -Q/4$ , pro  $n = 3$  dostaneme  $Q_0 = -Q/\sqrt{3}$ , pro  $n = 4$  obdržíme  $Q_0 = -1/2(2\sqrt{2} + 1)Q$  atd.



Obr. 1.6 Stabilita soustavy nábojů rozložených na obvodu kružnice.

Můžeme si položit otázku, jak to bude v případě  $n \rightarrow \infty$ , tj. je-li možno udržovat náboje spojitě a rovnoměrně rozložené po obvodu kružnice v rovnováze s centrálním nábojem  $Q_0$ . Označíme-li lineární hustotu nábojů rozložených po obvodu kružnice jako  $\tau$  a budeme hledat odpudivou sílu, kterou působí tyto náboje na malý element náboje kružnice  $\Delta Q$ , dostaneme divergující integrál. Centrální náboj, který by měl tuto sílu kompenzovat, by tedy musel mít nekonečnou velikost. Fyzikálně to ovšem znamená pouze to, že idealizace v podobě spojitého náboje rozloženého na nekonečně tenké kružnici není v tomto případě oprávněná.

Vraťme se nyní k otázce charakteru rovnováhy bodových nábojů na obr. 1.5. Podle (1.24) snadno zjistíme, že potenciální energie této soustavy nábojů je rovna nule (a podobně pro případ  $n = 3, 4$ , a dále). Předpokládejme nyní, že se centrální náboj  $Q_0$  mírně vychýlí z rovnovážné polohy v kladném směru osy  $x$ . Síla, která naň bude v této poloze působit

$$\mathbf{F}' = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(a-x)^2} - \frac{1}{(a+x)^2} \right] \mathbf{x}_0 \quad (1.26)$$

( $\mathbf{x}_0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $x$ ), bude výchylku dále zvětšovat – rovnováha tedy byla labilní. Snadno se přesvědčíme, že potenciální energie jako funkce souřadnice  $x$

$$A = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{2(a+x)} - \frac{1}{2(a-x)} \right] \quad (1.27)$$

má pro  $x = 0$  maximum.

Vychýlíme-li nyní náboj  $Q_0$  z rovnovážné polohy ve směru osy  $y$ , bude výsledná síla

$$\mathbf{F}'' = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{y}_0 \quad (1.28)$$

( $\mathbf{y}_0$  je jednotkový vektor ve směru osy  $y$ ) vracet tento náboj do rovnovážné polohy – vzhledem k proměnné  $y$  je rovnováha stabilní. Opět můžeme ověřit, že potenciální energie

$$A = -\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] \quad (1.29)$$

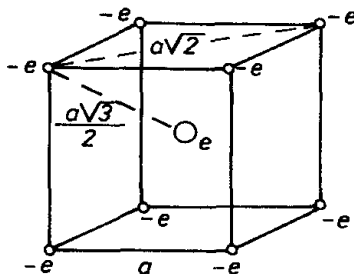
má jako funkce  $y$  minimum.

Z uvedeného příkladu jsme viděli, že rovnováha statických bodových nábojů nebyla stabilní. Přesvědčili bychom se o tom i v dalších, složitějších případech. Skutečně platí obecná věta (*Earnshawova*) o tom, že náboje nelze udržovat ve stabilní rovnováze výhradně elektrostatickými silami (viz články 1.2.5 a 1.4.6).

### b) Elektrostatická energie iontového krystalu

Určeme elektrostatickou potenciální energii prostorového uspořádání kladných a záporných bodových nábojů, s jakými se setkáváme například u iontových krystalů. Mějme krychli o hraně  $a$  jako element kubické mřížky. Ve vrcholech krychle necht' jsou umístěny ionty o náboji  $-e$ , ve středu krychle iont o náboji  $+e$  (obr. 1.7). Vyčíslíme-li elektrostatickou potenciální energii (1.25) krychle, dostaneme

$$A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} \left( 12 + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{16}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3,09 \cdot 10^{-27}}{a} \text{ (J)}. \quad (1.30)$$

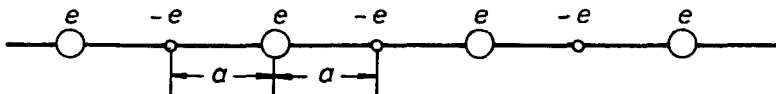


Obr. 1.7 Elektrostatická energie elementární kubické mřížky iontového krystalu.

Protože typické vzdálenosti iontů v krystalech jsou v řádu  $10^{-10}$  m, vidíme že zjištěná energie je v řádu  $10^{-17}$  J, tj. asi 100 elektronvoltů (eV) – 1 elektronvolt  $\doteq 1,602 \cdot 10^{-19}$  J. K určení elektrostatické energie celého krystalu, respektive jeho jednotkového objemu, bychom museli sčítat příspěvky od sousedních a dalších elementů krystalové mřížky, tj. sčítat nekonečné znakoproměnné řady. Provedme to pro tzv. *lineární krystal*, tj. rozložení střídavě kladných a záporných nábojů  $\pm e$  ve stejných vzdálenostech  $a$  podél přímky (obr. 1.8). Zjistíme, že potenciální energie připadající na jeden náboj je

$$A = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots \right) = -\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a} = -2,30 \cdot 10^{-28} \frac{\alpha}{a} \text{ (J)}, \quad (1.31)$$

kde veličina  $\alpha = 2 \ln 2 = 1,386 \dots$  se nazývá *Madelungova konstanta*.



Obr. 1.8 Elektrostatická energie lineárního krystalu.

V případě reálného trojrozměrného iontového krystalu je výpočet numericky obtížný a provádí se na počítačích. Přesto však se výsledné hodnoty elektrostatické

energie připadající na jeden iont řádově neliší od hodnoty uvedené ve vzorci (1.31). Odpovídá to energiím kolem 10 eV typickým pro chemické procesy.

Tak pro krystal chloridu sodného činí Madelungova konstanta 1,747 ..., pro oxid zinečnatý 1,638 ... apod. Všimněme si, že hodnota energie daná výrazem (1.31) je záporná, při zmenšení mřížkové konstanty  $a$  klesá, a mělo by proto dojít ke zhroucení krystalu. Neděje se to proto, že v důsledku působení kvantových sil odpuzování na malých vzdálenostech je třeba výraz (1.31) vynásobit faktorem  $(1 - \rho/a)$ , kde  $\rho$  je experimentálně určovaná kladná konstanta.

## 1.2 ELEKTROSTATICKÉ POLE VE VAKUU

### 1.2.1 VEKTOR INTENZITY ELEKTROSTATICKÉHO POLE BODOVÝCH NÁBOJŮ

Uvažujme soustavu statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  ve vakuu. Silové působení na další náboj  $Q$  je dáno vztahem (1.5) a lze je vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{F} = Q \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

kde

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.33)$$

Veličina  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , kterou jsme formálně zavedli vztahy (1.32) a (1.33), představuje vektorové pole, nazývá se *intenzitou elektrostatičkého pole* a je to vlastně síla, která působí v daném bodě na jednotkový kladný elektrický náboj. Vektor  $\mathbf{E}$  je definován v každém bodě prostoru s výjimkou těch, v nichž se nacházejí náboje  $Q_i$  (pro ně  $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| = 0$ ). Tato potíž je důsledkem předpokladu o bodovém, diskretním charakteru nábojů. V článku 1.2.4 uvidíme, že pro náboje spojitě rozložené v prostoru lze definovat intenzitu pole, která má smysl i v bodech s nenulovou hustotou náboje.

Zavedením intenzity elektrostatičkého pole jsme rozdělili problém silového působení mezi náboji do dvou kroků. Za prvé jsme bodu  $\mathbf{r}$  přiřadili určitou hodnotu veličiny  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  (intenzity pole) podmíněnou a určenou přítomností nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  v bodech  $\mathbf{r}_1$  až  $\mathbf{r}_N$ . Za druhé jsme vyjádřili sílu působící na náboj  $Q$  umístěný v bodě  $\mathbf{r}$  jako součin tohoto náboje a intenzity pole v daném bodě. Intenzita pole byla tak zavedena čistě formálně jako vektorové pole v matematickém smyslu. Tento postup je výhodný zejména při vyšetřování elektrostatičkého působení vodičů nebo v látkovém prostředí, kde není možno sledovat konkrétní rozložení nábojů v prostoru.

Elektrostatičké pole reprezentované svojí intenzitou (pro soustavu bodových nábojů vyjádřenou vztahem (1.33)), má některé pozoruhodné rysy, které zůstávají



v platnosti i pro jiné obecnější typy polí. Je to především sama skutečnost, že síla působící na náboj v kterémkoliv bodě prostoru je úměrná *hodnotě tohoto náboje*. Druhá, ještě pozoruhodnější, je vlastnost nazývaná *lokálnost pole*. K určení síly působící na bodový náboj stačí znát pouze vektor intenzity pole v daném bodě a neuplatňuje se zde vliv okolí.

Znalost rozložení a hodnot nábojů vytvářejících elektrostatické pole a znalost intenzity pole jako funkce prostorových souřadnic jsou ekvivalentní. Vše, co lze vyjádřit pomocí poloh a hodnot nábojů, lze vyjádřit i pomocí intenzity pole; druhý způsob je přitom elegantnější a mnohem pohodlnější. Díky tomuto dualismu v možnosti popisu vzniká otázka, zda je třeba za prvotní fyzikální realitu považovat náboje či pole. Odpověď na tuto principiální otázku má dva pohledy. Tím, že jsme výraz pro sílu působící na náboj  $Q$  upravili na tvar (1.32) a zavedli intenzitu elektrostatického pole, jsme nikterak neovlivnili fyzikální obsah. Zatímco elektrický náboj a jeho silové účinky na jiné náboje jsou experimentálně prokázány, neexistuje žádný elektrostatický experiment, který by dokazoval existenci elektrostatického pole jako reálné fyzikální substance.

Na druhé straně však v kapitole 5, ve které budeme studovat vlastnosti nestacionárního elektromagnetického pole, uvidíme, že toto pole nemusí být vázáno na náboje, má vlastní hybnost a energii, která se může šířit prostorem, a řadu dalších reálných vlastností. *Nestacionární elektromagnetické pole* je jednou z forem hmoty, stejně reálnou jako látka. *Makroskopické elektrostatické pole* je pak jeho speciálním případem v situaci, kdy nositelé náboje v dané soustavě souřadnic  $n, e, k, o, n, a, j$  *makroskopický pohyb*. Intenzitu pole ve smyslu vztahu (1.32) je třeba považovat za časovou a prostorovou střední hodnotu polí, která jsou v daném místě buzena jednotlivými mikroskopickými nositeli náboje. V tomto smyslu je elektrostatické pole fyzikálně reálným, adekvátním popisem elektromagnetické interakce v uvedené situaci.

Jednotku pro intenzitu elektrostatického pole lze odvodit z definičního vztahu (1.32) jako  $\text{NC}^{-1}$ . V mezinárodní soustavě jednotek je však jednotka intenzity elektrostatického pole odvozena od jednotky potenciálu *volt* (V) – viz odstavec 1.2.3. Pro intenzitu pole pak plyne jednotka  $\text{V m}^{-1}$ ; obě jednotky jsou však ekvivalentní.

Na základě principu superpozice lze intenzitu pole vyjádřenou vztahem (1.33) chápat jako vektorový součet intenzit vytvořených v daném bodě  $\mathbf{r}$  jednotlivými náboji  $Q_1$  až  $Q_N$ . Lze tedy psát

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i(\mathbf{r}), \quad (1.34)$$

kde

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (1.35)$$

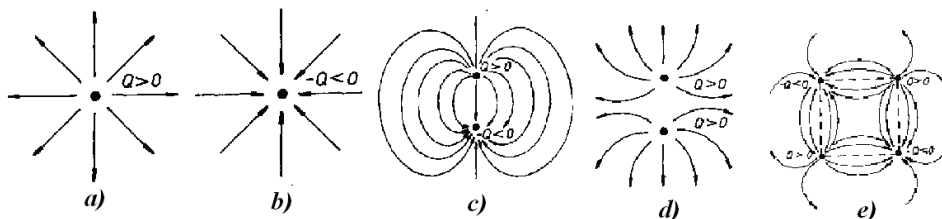
Speciálně intenzita elektrostatického pole jediného bodového náboje  $Q$  umístěného v počátku soustavy souřadnic je dána vztahem

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}. \quad (1.36)$$

Velikost intenzity elektrostatického pole bodového náboje ubývá tedy se čtvercem vzdálenosti.

Pro získání představy o průběhu pole dané soustavy nábojů je výhodné jeho grafické znázornění. K tomu účelu se nejčastěji užívá pojmu *siločáry*. Siločára je definována v bodech s nenulovou intenzitou pole jako orientovaná křivka mající tu vlastnost, že vektor intenzity v daném jejím bodě leží ve směru tečny, přičemž orientace vektoru intenzity souhlasí se směrem orientace křivky. Siločáry vždy vycházejí z kladných nábojů a vstupují do nábojů záporných; mohou též počínat a končit v nekonečnu. Protože vektor intenzity pole je v každém bodě definován jednoznačně, nemohou se siločáry vzájemně protínat. Hustotou siločar je možné vyjádřit velikost intenzity pole v dané části prostoru, podobně jako lze na mapě vyjádřit příkrost svahu hustotou vrstevnic. Pro získání názoru o průběhu pole obvykle stačí zobrazit soustavu siločar v některých význačných rovinách symetrie soustavy.

Na obrázku 1.9 je uvedeno několik příkladů. Obrázek 1.9a (1.9b) zobrazuje pole izolovaného kladného (záporného) bodového náboje v rovině procházející tímto nábojem. Na obrázku 1.9c vidíme pole dvojice bodových nábojů téže velikosti a opačného znaménka (takzvaný *elektrický dipól*) v rovině, v níž oba náboje leží. Podobně na obr. 1.9d je znázorněno analogickým způsobem pole dvojice kladných bodových nábojů téže velikosti. Konečně obr. 1.9e zobrazuje elektrostatické pole čtveřice bodových nábojů stejné velikosti umístěných ve vrcholech čtverce tak, že náboje stejného znamení leží na úhlopříčných vrcholech. Útvar uvedeného typu představuje takzvaný *elektrický kvadrupól*. Celkový náboj kvadrupólu je, podobně jako u elektrického dipólu, nulový. Jak uvidíme v oddílu 1.3, elektrický dipól a kvadrupól představují první členy řady takzvaných *elektrických multipólů*, které mají velký význam při aproximativním popisu elektrostatických polí nabitých těles s obecným rozložením nábojů.



Obr. 1.9 Znázornění elektrického pole siločarami: a) kladného bodového náboje, b) záporného bodového náboje, c) konečného elektrického dipólu, d) soustavy dvou kladných bodových nábojů, e) konečného elektrického kvadrupólu.

## I.2.2 TOK INTENZITY ELEKTROSTATICKEHO POLE BODOVÝCH NÁBOJŮ

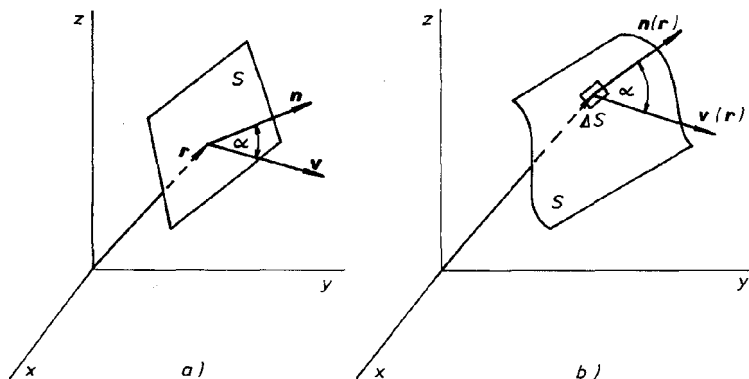
Zavedeme nyní důležitý pojem *toku intenzity elektrostatického pole*. Pro názornost se přitom obrátíme k hydrodynamické analogii. Uvažujme proudící kapalinu.

Ptáme se, jaké její množství proteče danou plochou  $S$  za jednotku času. K řešení této úlohy zřejmě stačí znát rychlost kapaliny  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  v každém bodě plochy  $S$ , tedy tzv. pole rychlostí. Ve speciálním případě podle obr. 1.10a, kdy plocha  $S$  je rovinná a rychlost kapaliny  $\mathbf{v}$  ve všech jejích bodech je konstantní, platí pro hledaný průtok kapaliny  $\Phi$  zřejmě

$$\Phi = vS \cos \alpha. \quad (1.37)$$

Jestliže je rovinná plocha  $S$  orientována, tj. je-li rozhodnuto, která ze dvou možných orientací vektoru normály je kladná, je možné zapsat výraz (1.37) ve vektorovém tvaru. Orientaci ohraničené rovinné plochy můžeme stanovit například tak, že rozhodneme, který z možných dvou směrů oběhu po její hranici je kladný, a požadujeme, aby kladný směr vektoru normály spolu se zvoleným kladným oběhem tvořily pravotočivou soustavu. Označíme-li jednotkový kladný vektor normály jako  $\mathbf{n}$  a položíme-li vektor plochy  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ , můžeme (1.37) zapsat ve tvaru skalárního součinu

$$\Phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}. \quad (1.38)$$



Obr. 1.10 K definici toku vektorové veličiny: a) rovinnou plochou, b) obecnou plochou.

V obecném případě podle obr. 1.10b, kdy má plocha  $S$  libovolný tvar a vektor rychlosti je funkcí polohy, nemůžeme definovat směr normály platný pro plochu  $S$  jako celek. Tok  $\Phi$  však můžeme vypočítat jako součet toků  $\Delta\Phi_i$ , přes dostatečně malé plošky  $\Delta S_i$ , které je možno s požadovanou přesností považovat za rovinné a jejichž sjednocení zcela vyplní plochu  $S$ . Pro každou plošku  $\Delta S_i$  lze alespoň přibližně

zavést kladný jednotkový vektor normály  $\mathbf{n}_i$  a psát  $\Delta\mathbf{S}_i = \Delta S_i \mathbf{n}_i$ , takže  $\Delta\Phi_i = \mathbf{v} \Delta\mathbf{S}_i$ . Z uvedené úvahy je patrné, jak je třeba zobecnit definici toku vektorového pole obecnou plochou, aby si tento pojem zachoval svůj fyzikální smysl. Tok intenzity elektrostatičkého pole budeme definovat jako plošný integrál

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (1.39)$$

Pro tok malou ploškou  $\Delta S$  máme

$$\Delta\Phi = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}. \quad (1.40)$$

Má-li vektor  $\mathbf{E}$  směr kladné normály k plošce  $\Delta S$ , bude tok touto ploškou maximální a můžeme psát

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (1.41)$$

Vidíme, že vektor intenzity elektrostatičkého pole můžeme považovat za vektor *hustoty toku* intenzity tohoto pole (srov. analogický vztah mezi proudem a hustotou proudu – odst. 3.1.1). Je zřejmé, že jednotkou toku intenzity elektrostatičkého pole bude volt metr (V m).

Této okolnosti se využívá při normování počtu siločar procházejících kolmo danou plochou. Můžeme totiž požadovat, aby počet takových siločar připadajících na jednotku plochy byl právě roven velikosti vektoru intenzity elektrostatičkého pole.

Určíme nyní počet siločar vycházejících z kladného bodového náboje  $Q$  umístěného v počátku souřadnic. Jak víme, vycházejí siločáry z tohoto náboje radiálně a jsou rozloženy sféricky symetricky. Obklopíme náboj  $Q$  koncentrickou kulovou plochou poloměru  $r$ . Celkový počet siločar vycházejících z náboje  $Q$  je  $N = \Phi$ . Počet siločar ve vzdálenosti  $r$  připadající na jednotku plochy přirovnáme velikosti vektoru  $\mathbf{E}$  (1.36)

$$\frac{\Phi}{S} = \frac{N}{4\pi r^2} = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.42)$$

Odtud dostáváme

$$\Phi = N = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1.43)$$

Počet siločar vycházejících z bodového náboje a velikost tohoto náboje jsou tedy vázány vztahem úměrnosti. Tato skutečnost má závažný význam. Později uvidíme, že i při pohybu náboje zůstává jeho velikost a počet siločar s ním spojených neměnný.<sup>5</sup>

5 Uvažujte, jak by se změnilo znázornění elektrostatičkého pole siločarami v případě, že by v Coulombově zákonu neplatila závislost převrácených čtverců.

Zjistili jsme, že tok intenzity elektrostatičkého pole uzavřenou kulovou plochou, v jejímž středu je umístěn náboj  $Q$ , je roven (1.43). Ukážeme nyní, že tento vztah platí obecně pro uzavřenou plochu libovolného tvaru a celkový náboj v prostoru ohraničeném touto plochou.

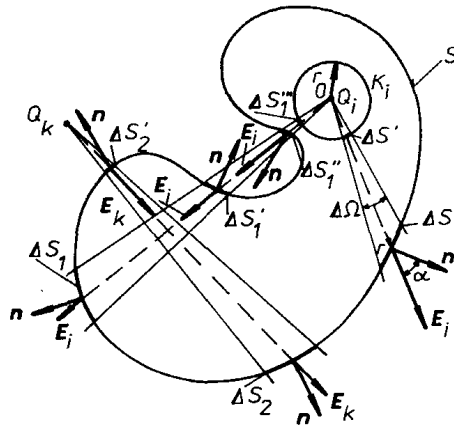
Uvažujme opět soustavu statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$ . Zvolme uzavřenou plochu  $S$ , v níž jsou obsaženy některé z těchto nábojů; nechť žádný z nich na ní neleží. Uzavřenou plochu budeme orientovat tak, že vektor normály  $\mathbf{n}$  mířící na její vnější stranu budeme považovat za kladný. Najdeme celkový tok intenzity elektrického pole  $\Phi$  touto plochou. S ohledem na princip superpozice a aditivnost toku můžeme vyšetřovat příspěvek každého náboje zvlášť.

Nechť náboj  $Q_i$  leží uvnitř prostoru ohraničeného plochou  $S$ . Opíšme kolem něj kouli  $K_i$  o poloměru  $r_0$  a veďme kuželovou plochu o prostorovém vrcholovém úhlu  $\Delta\Omega$  (viz obr. 1.11). Tato plocha vytíná na kouli  $K_i$  malou plošku  $\Delta S' = r_0^2 \Delta\Omega$  a na ploše  $S$  plošku  $\Delta S = r^2 \Delta\Omega / \cos \alpha$ . Platí

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_0) \cdot \Delta \mathbf{S}' = \mathbf{E}_i(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{S}, \quad (1.44)$$

neboť

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_0^2} r_0^2 \Delta\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r^2} \frac{r^2 \Delta\Omega}{\cos \alpha} \cos \alpha.$$



Obr. 1.11 K formulaci Gaussova zákona.

Tok intenzity vzbuzené nábojem  $Q_i$  je tedy stejný pro obě plošky  $\Delta S$ ,  $\Delta S'$ . Jak plyne z obrázku, nezmění se situace ani tehdy, protne-li kuželová plocha plochu  $S$  několikrát. Toky všemi ploškami  $\Delta S$ ,  $\Delta S'_1$ ,  $\Delta S'_2$  jsou v absolutní hodnotě stejné a rovné toku příslušnou ploškou  $\Delta S''_1$  vytčenou na kouli. Tok ploškou  $\Delta S'_1$  je však záporný, takže platí opět  $\Phi''_1 = \Phi_1 + \Phi'_1 + \Phi''_1$ . Tok  $\Phi_i$ , kterým náboj  $Q_i$  přispívá k celkovému toku plochou  $S$ , je tedy roven toku vektoru  $\mathbf{E}_i$  kulovou plochou  $K_i$

$$\Phi_i = \int_{K_i} \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_i \int_{4\pi} d\Omega = \frac{Q_i}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

v souladu s (1.43).

Na základě analogických úvah zjistíme, že náboje ležící vně plochy  $S$  nepřispívají k celkovému toku (viz příklad náboje  $Q_k$  na obrázku). Použijeme-li nyní princip superpozice, můžeme formulovat *Gaussův zákon elektrostatiky pro soustavu bodových nábojů*:

*Celkový tok  $\Phi$  intenzity elektrostatického pole soustavy bodových nábojů libovolnou uzavřenou plochou  $S$  je roven celkovému náboji  $Q_c$  uzavřenému uvnitř této plochy dělenému konstantou  $\epsilon_0$ .*

Platí

$$\Phi = \sum_i \Phi_i, \quad (1.46)$$

přičemž index  $i$  probíhá pouze náboje umístěné uvnitř plochy  $S$ . Označíme-li celkový náboj uvnitř této plochy jako  $Q_c = \sum_i Q_i$ , můžeme Gaussův zákon zapsat ve tvaru

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_c}{\epsilon_0} \quad (1.47)$$

(značka  $\oint$  vyjadřuje, že plošný integrál je brán přes uzavřenou plochu).

Gaussův zákon hraje v nauce o elektrické fundamentální úlohu. V dalším výkladu uvidíme, že platí pro libovolné elektrostatické pole a je možno jej zobecnit i na případ pohybujících se nábojů. Jak je patrné z průběhu odvození, je Gaussův zákon přímým důsledkem Coulombova zákona, resp. zákona převrácených čtverců a principu superpozice. Přitom Gaussův zákon a z něj plynoucí důsledky je možno ověřit dalšími experimenty, např. s rozložením nábojů na vodičích, a tím nepřímo dokázat i platnost Coulombova zákona (viz článek 1.4.2). Při odvozování Gaussova zákona jsme nevyužili předpokladu o kulové symetrii pole bodového náboje a v tomto smyslu je Gaussův zákon obecnější než zákon Coulombův. Doplníme-li k platnosti Gaussova zákona předpoklad kulové symetrie, dostaneme snadno vztah (1.36) a přes (1.32) Coulombův zákon.

### 1.2.3 POTENCIÁL ELEKTROSTATICKEHO POLE BODOVÝCH NÁBOJŮ

Zmínili jsme se o tom, že silové působení soustavy statických bodových nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$  na náboj  $Q$  umístěný v bodě  $\mathbf{r}$  lze popsat zavedením vektorového pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  daného výrazem (1.33). V bodech  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  není vektorová funkce  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  definována, má zde singularitu řádu  $1/x^2$ . Uvažme nyní skalární funkci (skalární pole)  $\varphi(\mathbf{r})$  definovanou vztahem

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C, \quad (1.48)$$

kde  $C$  je libovolná konstanta. Tato funkce má rovněž singularity v bodech  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$  (řádu  $1/x$ ); všude jinde má parciální derivace všech řádů. Pro případ jednoho bodového náboje umístěného v počátku souřadnic definujeme podle (1.48)

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C. \quad (1.49)$$

Vypočítáme-li nyní parciální derivace prvního řádu funkce  $\varphi(\mathbf{r})$  dané vztahem (1.48), popř. (1.49), zjistíme, že pro  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  dané vztahem (1.33), popř. (1.36), platí

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}), \quad (1.50)$$

kde symbol  $\text{grad } \varphi$  značí vektor  $\text{grad } \varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$  nazývaný gradientem funkce  $\varphi$  (podrobněji viz Dodatek I).

Skalární funkci  $\varphi(\mathbf{r})$  nazýváme *potenciálem elektrostatického pole*. Vzhledem k platnosti vztahu (1.50) je možné potenciál použít k popisu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů stejně tak jako intenzitu pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ; popis pomocí potenciálu je dokonce jednodušší (je to skalár a při sčítání potenciálů se nemusíme starat o směr této veličiny). Přítomnost volitelné konstanty  $C$  v definičním vztahu (1.48) pro potenciál ukazuje na to, že potenciál není definován jednoznačně. Jak uvidíme, tato skutečnost nemá však fyzikální důležitost.

Existence potenciálu obecného vektorového pole není samozřejmá a pole, která je možno vyjádřit vztahem (1.50), nazýváme *potenciálními*. Možnost popisu elektrostatického pole soustavy bodových nábojů pomocí potenciálu jsme dokázali tím, že jsme zkonstruovali funkci (1.48) vyhovující vztahu (1.50). Vzniká ovšem otázka, jaký má potenciál fyzikální význam a jakou vlastnost elektrostatického pole vyjadřuje.

V uvažovaném poli soustavy bodových nábojů zvolme pevný bod  $\mathbf{r}_0$  různý od všech bodů  $\mathbf{r}_1$  až  $\mathbf{r}_N$  ve kterých sídlí bodové náboje. Zvolme dále libovolný bod  $\mathbf{r}$  téže vlastnosti a oba body spojme křivkou  $l$ , která je orientována od bodu  $\mathbf{r}_0$  k  $\mathbf{r}$  a která neprochází žádným z bodů  $\mathbf{r}_0$  až  $\mathbf{r}_N$ . Bude nás zajímat práce  $W_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0}$  kterou musí vnější síly vykonat, má-li být bodový náboj  $Q$  přenesen z výchozího bodu  $\mathbf{r}_0$  po křivce  $l$  do bodu  $\mathbf{r}$ . Platí (srov. vztah (1.23))

$$W_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} = \int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}, \quad (1.51)$$

kde  $\mathbf{F}$  značí sílu podle (1.32), která musí být při přenášení náboje  $Q$  překonávána. Využitím rovnice (1.50) dostaneme dále

$$W_{\mathbf{r},\mathbf{r}_0} = -Q \int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q \int_l \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.52)$$

Výraz

$$\text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{l} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = d\varphi \quad (1.53)$$

však představuje totální diferenciál potenciálu. Odtud vyplývá důležitý výsledek

$$W_{r,r_0} = Q \int_{r_0}^r d\varphi = Q[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)]. \quad (1.54)$$

Práce  $W_{r,r_0}$  závisí jen na potenciálu koncových bodů dráhy  $l$  a nezávisí na jejím průběhu. Má tedy význam potenciální energie náboje  $Q$  v bodě  $\mathbf{r}$  vzhledem k bodu  $\mathbf{r}_0$ .

Potenciál elektrostatického pole v daném bodě zde tedy představuje potenciální energii vztahenou k jednotkovému náboji. Je určen vzhledem k referenčnímu bodu, jehož potenciál i polohu můžeme volit libovolně. Pokud jsou všechny náboje rozloženy v konečné části prostoru, volíme obvykle referenční bod v nekonečnu a klademe tam potenciál roven nule. Potom podle rovnic (1.50) a (1.53) máme

$$\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.55)$$

Fyzikální smysl má tedy jen *rozdíl potenciálů* ve dvou bodech  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , který můžeme měřit, tedy

$$\varphi(\mathbf{r}_2) - \varphi(\mathbf{r}_1) = - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.56)$$

Práci, kterou vykoná elektrostatické pole při přemístování bodového jednotkového kladného náboje z bodu  $\mathbf{r}_1$  do bodu  $\mathbf{r}_2$ , nazýváme *napětím* mezi těmito body:

$$U_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (1.57)$$

Napětí je tedy rovno záporně vzatému rozdílu potenciálů a je kladné, má-li výchozí bod vyšší potenciál než bod koncový. Elektrostatické pole vykoná v takovém případě při přemístování kladného náboje kladnou práci  $A = Q U_{12}$ .

Ze vztahu (1.54) snadno stanovíme jednotku pro měření potenciálu, resp. napětí. V Mezinárodní soustavě je jí *volt* (V). Mezi dvěma body je napětí jednoho voltu, jestliže elektrické pole při přenesení náboje jednoho coulombu vykoná práci jednoho joulu. Ze vztahu (1.57) pak plyne jednotka intenzity elektrostatického pole  $\text{V m}^{-1}$ .

Nyní použijeme potenciál k vyjádření potenciální energie soustavy bodových nábojů, kterou jsme odvodili v článku 1.1.5. Mějme nejprve dvojici nábojů  $Q_1, Q_2$  ve vzájemné vzdálenosti  $R_{12}$ . Náboj  $Q_1$  vyvolává v bodě, kde je umístěn druhý



náboj  $Q_2$ , potenciál  $\varphi_2$  daný vztahem tvaru (1.49) s  $C = 0$ . Analogicky náboj  $Q_2$  vyvolává potenciál  $\varphi_1$  v bodě, v němž je umístěn náboj  $Q_1$ . Potenciální energii soustavy těchto dvou nábojů můžeme pak zapsat jako

$$A_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R_{12}} = Q_1 \varphi_1 = Q_2 \varphi_2, \quad (1.58)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_{12}}, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_{12}}.$$

Víme, že tato energie nezávisí na tom, po jaké trajektorii se náboj  $Q_1(Q_2)$  přibližoval z nekonečna do bodu o vzdálenosti  $R_{12}$  od náboje  $Q_2(Q_1)$ .

Mějme nyní soustavu nábojů  $Q_1$  až  $Q_N$ . Potenciální energii náboje  $Q_j$  v poli ostatních nábojů  $Q_{i \neq j}$  můžeme vyjádřit pomocí potenciálu s uvážením principu superpozice jako

$$A_j = -Q_j \varphi_j, \quad \varphi_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j} \frac{Q_i}{R_{ij}}, \quad (1.59)$$

takže výsledná potenciální energie soustavy (1.25) bude mít tvar

$$A = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N Q_j \varphi_j. \quad (1.60)$$

Ze skutečnosti, že práce vykonaná při přenesení náboje mezi dvěma body v elektrostatickém poli nezávisí na trajektorii, přímo vyplývá, že práce vykonaná po uzavřené křivce je vždy rovna nule. Přenášíme-li po takové trajektorii jednotkový náboj, na nějž působí síla rovná intenzitě pole  $\mathbf{E}$ , dostaneme obecný integrální vztah

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (1.61)$$

(symbol  $\oint_l$  vyjadřuje, že integrál je brán podél uzavřené křivky  $l$ ; nazýváme ho cirkulace vektoru  $\mathbf{E}$  podél této křivky). Podle Stokesovy věty vektorové analýzy (viz D 1.45)

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (1.62)$$

kde  $S$  je libovolná plocha, která má za svou hranici křivku  $l$ . Připomeňme, že vektorové pole  $\text{rot } \mathbf{E}$  nazývané rotace  $\mathbf{E}$  je v kartézských souřadnicích definováno jako

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

(viz Dodatek I).

Vzhledem k tomu, že křivka  $l$  je libovolná, bude vztah (1.62) platit i pro diferenciálně malou plošku  $dS$ . Pak dostaneme diferenciální obdobu vztahu (1.61) jako

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (1.63)$$

Mohli jsme též použít identity vektorové analýzy (viz D 1.64)

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \mathbf{0}.} \quad (1.64)$$

Rovnice (1.61), resp. (1.63) jsou přímým důsledkem existence potenciálu. Použitý postup lze ovšem i obrátit a z platnosti těchto rovnic existenci potenciálu vyvodit. Vztah (1.61), resp. (1.63) platí tedy právě tehdy, existuje-li skalární funkce splňující podmínku (1.50). Znamená to, že elektrostatické pole soustavy bodových nábojů je *potenciální* a *konzervativní* (energie náboje se po návratu do výchozího bodu zachová).

Pro grafické znázornění elektrostatického pole lze vedle siločar použít též tzv. *ekvipotenciálních ploch*. Jsou definovány jako geometrické místo bodů, v nichž má potenciál předepsanou konstantní hodnotu  $\varphi_i$ . Snadno lze dokázat, že siločáry jsou vždy k ekvipotenciálním plochám kolmé. Diferencujeme-li totiž rovnici

$$\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_i = \text{konst}, \quad (1.65)$$

dostaneme

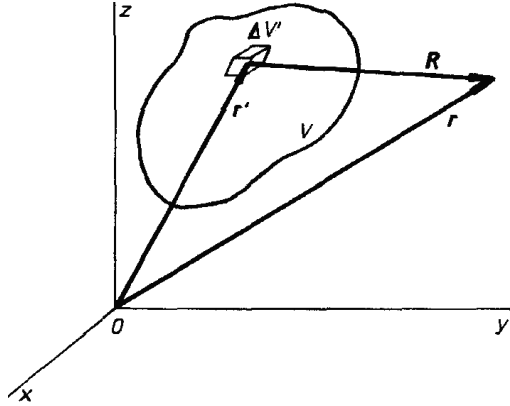
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz) = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.66)$$

Jelikož vektor  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  leží v rovině tečné k ekvipotenciální ploše, je dokazované tvrzení zřejmé. Pro posouzení průběhu pole opět stačí vyšetřovat pouze průsečnice ekvipotenciálních ploch s některými význačnými rovinami symetrie soustavy.

## 1.2.4 ELEKTROSTATICKÉ POLE OBECNĚ ROZLOŽENÝCH NÁBOJŮ

Dosud jsme se zabývali elektrostatickým polem vytvářeným soustavou bodových nábojů. Nyní přejdeme k obecnému rozložení elektrických nábojů, které jsme popsali v článku 1.1.4 pomocí pojmu objemové (plošné, lineární) hustoty náboje. Hustotu náboje budeme pokládat za známou funkci polohového vektoru,

nezávislou na čase. Nebudeme se přitom starat o fyzikální vlastnosti objektů nesoucích tyto náboje, ani nebudeme brát v úvahu jejich vliv na vyšetřované elektrostatické pole. Jinými slovy řečeno, budeme předpokládat určité známé rozložení nábojů v prostoru a jimi vytvořené elektrostatické pole budeme považovat za pole ve vakuu.



Obr. 1.12 K výpočtu elektrického pole objemově rozloženého náboje pomocí principu superpozice.

Uvažujme náboj  $Q$  objemově rozložený v oblasti o objemu  $V$  s hustotou  $\rho(\mathbf{r}')$  (obr. 1.12). Pro přibližný výpočet intenzity pole vzbuzeného tímto nábojem v libovolném bodě  $\mathbf{r}$  ležícím mimo oblast  $V$  použijeme Coulombův zákon a princip superpozice; rozdíl vektorů  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  označíme jako  $\mathbf{R}$ . Nejdříve určíme příspěvek náboje  $\Delta Q$  rozloženého v malém objemu  $\Delta V'$ , který obsahuje bod  $\mathbf{r}'$ . Zvolíme-li tento objem dostatečně malý, můžeme náboj  $\Delta Q \doteq \rho(\mathbf{r}')\Delta V'$  vzhledem ke vzdálenosti k bodu  $\mathbf{r}$  považovat s potřebnou přesností za bodový. Jeho příspěvek  $\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r})$  k celkové intenzitě pole můžeme podle (1.35) vyjádřit ve tvaru

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')\Delta V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.67)$$

Analogicky pro příspěvek  $\Delta\varphi(\mathbf{r})$  k potenciálu v daném bodě dostaneme podle (1.49) (klademe  $C = 0$ )

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) \doteq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}')\Delta V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.68)$$

Celkovou intenzitu pole  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ , resp. potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  můžeme podle principu superpozice s požadovanou přesností vyjádřit jako součet výrazů typu (1.67), popř. (1.68). Sčítání provádíme přes všechny elementární objemy, jejichž sjednocení zcela vyplní uvažovanou oblast  $V$ . Přesnost vyjádření bude samozřejmě tím větší, čím jemnější dělení oblasti  $V$  bude zvoleno.

Podle právě provedené úvahy lze očekávat, že objemové integrály (přes  $\mathbf{r}'$ )

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') \mathbf{R}}{R^3} dV', \quad (1.69a)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{R} \quad (1.70a)$$

budou přesně vyjadřovat hledanou intenzitu pole a potenciál ve všech bodech  $\mathbf{r}$  mimo objem  $V$ . Zmíněnou úvahu není ovšem možno ve smyslu formální logiky považovat za důkaz těchto vztahů. Kdybychom požadovali, aby naše teorie byla formálně konzistentní, museli bychom jejich platnost vedle Coulombova zákona rovněž postulovat. Fyzikální smysl výrazů (1.69a) a (1.33) je týž, rozdíl je pouze ve způsobu nazírání. Elektrostatické pole reálného tělesa nesoucího náboj je možno buď podle (1.33) vyjádřit jako pole vhodně zvolených diskrétně rozložených bodových nábojů, nebo podle (1.69a) jako pole spojitě rozloženého náboje.

Intenzita pole a potenciál vyjádřené vztahy (1.69a) a (1.70a) vyhovují definiční podmínce potenciálu (1.50):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}) = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \text{grad} \left( \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \end{aligned} \quad (1.71)$$

Funkce  $\rho$  popisující reálná rozložení náboje takovou záměnu pořadí derivování (podle  $\mathbf{r}$ ) a integrování (podle  $\mathbf{r}'$ ) vždy umožňuje. Stačí tedy určit pouze jednu z funkcí  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\varphi(\mathbf{r})$  a druhou najít pomocí vztahu (1.50).

Všechny úvahy, které jsme dosud prováděli pro prostorově rozložené náboje, můžeme reprodukovat i pro náboje rozložené plošně a lineárně. Je-li náboj  $Q$  rozložen na ploše  $S$  s plošnou hustotou  $\sigma(\mathbf{r}')$ , je možné intenzitu a potenciál jím vytvořeného elektrostatického pole v libovolném bodě neležícím na této ploše vyjádřit ve tvaru plošných integrálů

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS', \quad (1.69b)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (1.70b)$$

Analogicky, je-li náboj  $Q$  rozložen na křivce  $l$  s lineární hustotou  $\tau(\mathbf{r}')$ , je možno intenzitu a potenciál jím vytvořeného elektrostatického pole v libovolném bodě neležícím na této křivce vyjádřit ve tvaru křivkových integrálů

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV', \quad (1.69c)$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\tau(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (1.70c)$$

Na základě toho, co bylo dosud řečeno, umíme tedy obecně vyjádřit intenzitu a potenciál elektrostatického pole ve všech bodech, v nichž neleží bodové náboje a v nichž je hustota nábojů nulová. Vzniká nyní otázka, zda je možné rozšířit pojem elektrostatického pole také na body s nenulovou hustotou náboje. Pro vyřešení tohoto problému je třeba vyšetřit, za jakých podmínek mají výrazy (1.69) a (1.70) smysl i v uvedených bodech. Problém spočívá v tom, že jestliže bod  $\mathbf{r}$  leží v oblasti, přes níž se integruje, může integrační proměnná nabývat hodnoty  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ . Integrovaná funkce roste při  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$  do nekonečna. Mají-li být intenzita pole, resp. potenciál v tomto bodě konečné, budou mít charakter nevlastních hodnot příslušných integrálů. Existence těchto nevlastních hodnot pak závisí na průběhu hustoty náboje, tj. na tvaru funkcí  $\rho(\mathbf{r}')$ ,  $\sigma(\mathbf{r}')$ ,  $\tau(\mathbf{r}')$ .

Detailní rozbor této problematiky je záležitostí teorie elektromagnetického pole, resp. teorie potenciálu (viz např. [3]). Uvedeme proto jen hlavní závěry týkající se v praxi důležitých případů. Omezíme se přitom pouze na objemové a plošné rozložení nábojů. O funkcích  $\rho(\mathbf{r}')$  a  $\sigma(\mathbf{r}')$  vyjadřujících objemovou a plošnou hustotu náboje budeme prostě předpokládat, že jsou ve všech *vnitřních* bodech uvažované oblasti konečné a dostatečně hladké.

O elektrostatickém poli prostorově rozložených nábojů lze za uvedených předpokladů říci:

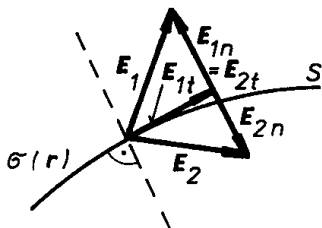
1. Výraz (1.70a) vyjadřuje konečný potenciál ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech oblasti  $V$ , kdy je hustota náboje  $\rho$  různá od nuly.
2. Tento potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu.
3. Výraz (1.69a) je roven  $-\text{grad } \varphi$  ve všech bodech prostoru. Vyjadřuje tedy správně intenzitu pole i uvnitř oblasti  $V$ , kde je hustota náboje různá od nuly.
4. Intenzita pole daná vztahem (1.69a) je všude spojitá.

O elektrostatickém poli plošně rozložených nábojů platí za analogických podmínek:

1. Výraz (1.70b) vyjadřuje konečný potenciál ve všech bodech prostoru, tedy i v bodech plochy  $S$ , kde je plošná hustota náboje  $\sigma$  různá od nuly.
2. Tento potenciál je všude spojitý a má parciální derivace alespoň prvního řádu ve všech bodech s výjimkou bodů plochy  $S$ .
3. Výraz (1.69b) je roven  $-\text{grad } \varphi$  ve všech bodech s výjimkou bodů plochy  $S$ . Na této ploše nemá intenzita pole smysl.
4. Intenzita pole daná vztahem (1.69b) je všude spojitá s výjimkou bodů plochy  $S$ . Při průchodu touto plochou zůstávají spojitě pouze její tečné složky. Její normálové složky se mění skokem o hodnotu  $\sigma/\epsilon_0$ . Platí tedy vztahy (viz obr. 1.13)

$$E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (1.72)$$

Ke zdůvodnění těchto vztahů se vrátíme v článku 1.2.6.



Obr. 1.13 Chování normálových a tečných složek elektrického pole při průchodu nabitou plochou.

### 1.2.5 GAUSSŮV ZÁKON PRO OBECNÉ ELEKTROSTATICKÉ POLE

S ohledem na princip superpozice lze očekávat, že Gaussův zákon formulovaný pro soustavu bodových nábojů rovnicí (1.47) bude platit také v případě spojitě rozložených nábojů. Abychom se o tom přesvědčili, museli bychom zkoumat výraz pro tok intenzity elektrostatičké pole (1.39) a dosadit v něm za vektorovou funkci  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  výrazy typu (1.69). Aniž bychom platnost takové obecnější formulace Gaussova zákona exaktně zdůvodňovali, uvedeme přímo jeho znění:

*Budiž dána libovolná uzavřená plocha  $S$  ohraničující těleso objemu  $V$  a orientovaná tak, že kladný vektor normály míří ven z tohoto tělesa. Necht' uvnitř této plochy je uzavřen náboj  $Q_c$ , který může být tvořen jednak bodovými náboji, jednak náboji spojitě rozloženými libovolným způsobem. Potom, existuje-li plošný integrál  $\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$  vyjadřující tok intenzity elektrostatičké pole touto plochou, platí*

$$\Phi = \frac{Q_c}{\epsilon_0}. \quad (1.73)$$

Jak plyne z formulace Gaussova zákona, existuje pouze jedině omezení na volbu plochy  $S$ , a to aby přímo neprocházela takovými singularitami pole, které by znemožnily určit tok  $\Phi$ . Toto omezení má však pouze teoretický význam, neboť v přírodě žádné singularity pole neexistují. Uvedené singularity mají svůj původ v tom, že k popisu pole používáme výhodných abstraktních pojmů jako bodový náboj, plošná hustota náboje apod. Kteroukoliv konkrétní skutečnou soustavu však můžeme s libovolnou přesností popsat objemovým rozložením nábojů tak, že pole je všude konečné a spojitě.

Ve speciálním případě, kdy uvnitř plochy  $S$  jsou nejvýše objemově rozložené náboje, lze rovnicí (1.73) vyjadřující Gaussův zákon v integrálním tvaru přepsat do tvaru diferenciálního. Náboj  $Q_c$  můžeme totiž vyjádřit objemovým integrálem

$$Q_c = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad (1.74)$$

(na rozdíl od integrálů (1.69) a (1.70) nyní integrujeme přes proměnnou  $\mathbf{r}$ ).

Dostaneme tak

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.75)$$

Podle Gaussovy věty vektorové analýzy (viz Dodatek 1, vztah (D 1.32)) lze však plošný integrál funkce  $\mathbf{E}$  na levé straně (1.75) vyjádřit pomocí objemového integrálu funkce  $\text{div } \mathbf{E}$  přes objem ohraničený plochou  $S$ . Platí tedy

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.76)$$

Protože plocha  $S$ , a tudíž i objem  $V$  jsou voleny libovolně, musí poslední rovnice platit i pro diferenciálně malé objemy  $dV$ . To je možné pouze tehdy, jsou-li si identicky rovny integrované funkce. Musí proto platit v každém bodě

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}}. \quad (1.77)$$

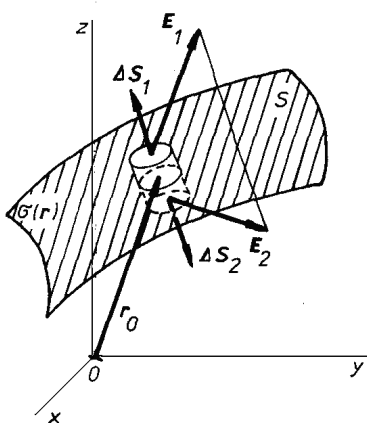
Rovnice (1.77) představuje parciální diferenciální rovnici prvního řádu a vyjadřuje tutéž vlastnost elektrostatického pole jako Gaussův zákon (1.73) (a zahrnuje tedy v sobě i Coulombův zákon). Není však vázána na zadanou plochu či objem, a je to tedy *Gaussův zákon v diferenciálním tvaru*. V kartézských souřadnicích ji můžeme zapsat jako

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (1.78)$$

Vzhledem ke geometrickému významu pojmu divergence (viz Dodatek 1) vyjadřuje tato věta skutečnost, že náboje jsou zdrojem siločar elektrostatického pole. Je-li v nějakém bodě hustota náboje  $\rho$ , a tedy i  $\text{div } \mathbf{E}$  kladná, znamená to, že siločáry z tohoto bodu vycházejí; naopak, jsou-li  $\rho$  a  $\text{div } \mathbf{E}$  záporné, siločáry do takového bodu vstupují. Naproti tomu v daném bodě prostoru, v němž není elektrický náboj ( $\rho = 0$ ), nelze vytvořit takovou konfiguraci elektrického pole, aby všechny okolní siločáry do tohoto bodu směřovaly. Odtud plyne tzv. *Earnshawova věta*, podle níž nelze elektrický náboj udržovat v prostoru ve stabilní rovnováze pouze silami elektrostatického pole (srov. příklad 1.1.6a).

## I.2.6 NABITÁ PLOCHA V ELEKTROSTATICKÉM POLI

Gaussův zákon v diferenciálním tvaru jsme odvodili pro případ objemově rozložených nábojů. Nyní budeme aplikovat Gaussův zákon (1.73) na případ plošně rozložených nábojů (obr. 1.14).



Obr. 1.14 K odvození hraničního vztahu pro normálové složky elektrického pole.

Mějme nabitou plochu  $S$  s plošnou hustotou náboje  $\sigma$  a na ní bod  $\mathbf{r}_0$ . Obklopíme tento bod válcovou plochou tak, že osa válce bude kolmá k ploše  $S$ , obsah podstavy válce roven  $\Delta S$  a dostatečně malý. Určíme tok intenzity elektrostatičkého pole touto válcovou plochou. K toku podstavami válce budou zřejmě přispívat pouze normálové složky pole  $\mathbf{E}_{1n}$ ,  $\mathbf{E}_{2n}$ ; vektory plošek obou podstav  $\Delta \mathbf{S}_1$ ,  $\Delta \mathbf{S}_2$  jsou přitom orientovány na opačné strany. Výšku válce můžeme učinit natolik malou, aby tok pláštěm byl zanedbatelný. Celkový tok válcovou plochou se pak zredukuje v limitě na  $\Phi = \mathbf{E}_1 \cdot \Delta \mathbf{S}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \Delta \mathbf{S}_2 = (E_{1n} - E_{2n}) \Delta S$ . Podle Gaussova zákona má být tento tok roven náboji uvnitř válcové plochy  $\sigma \Delta S$  dělenému  $\epsilon_0$ :

$$(E_{1n} - E_{2n}) \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}. \quad (1.79)$$

Po vykrácení  $\Delta S$  dostaneme druhou z podmínek (1.72)

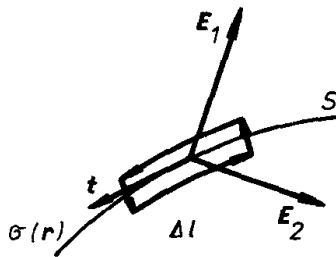
$$\boxed{\text{Div } \mathbf{E} = E_{1n} - E_{2n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}. \quad (1.80)$$

Takzvaná plošná divergence  $\text{Div } \mathbf{E}$  zavedená formálně vztahem (D 1.39), která se někdy používá, umožňuje vyjádřit podmínku pro normálové složky elektrostatičkého pole při průchodu danou plochou ve tvaru analogického Gaussova zákona v diferenciálním tvaru (1.77).



V předchozím textu jsme zavedli potenciál elektrostatického pole vytvářeného soustavou bodových nábojů, ukázali, že takové pole je konzervativní, a odvodili integrální vztah (1.61). Tento integrální vztah, a tedy i vlastnost konzervativnosti, bude zřejmě platit i pro obecné elektrostatické pole buzené libovolně uspořádanými náboji. Jediným požadavkem je, aby integrál  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  měl smysl, což je v reálné fyzikální situaci (podobně jako v případě Gaussova zákona) vždy splněno.

Dále jsme pomocí Stokesovy věty vektorové analýzy odvodili parciální diferenciální rovnici (1.63). Použití Stokesovy věty je přesně vzato omezeno pouze na případ, když vektor intenzity pole  $\mathbf{E}$  je spojitý a má spojitě parciální derivace ve všech bodech křivky  $l$  a jí ohraničené plochy  $S$ . V případě bodových, lineárních a plošných nábojů (což jsou všechno fyzikální abstrakce) nebude tedy Stokesova věta obecně použitelná. Obecná definice operace rotace (viz Dodatek I, vztah (D 1.43)) však není závislá na volbě souřadnic, na existenci a na vlastnostech příslušných parciálních derivací. Takto definovaná veličina  $\text{rot} \mathbf{E}$  má smysl i v bodech, kde jsou rozmístěny bodové lineární či plošné náboje a parciální diferenciální rovnice (1.63) nabývá obecnou platnost ve všech bodech prostoru pro libovolné elektrostatické pole.



Obr. 1.15 K odvození hraničního vztahu pro tečné složky elektrického pole.

Dokažme nyní platnost prvního z hraničních vztahů (1.72) pro tečné složky elektrostatického pole (viz obr. 1.15). Mějme opět nabitou plochu  $S$  a veďme kolem uvažovaného bodu této plochy obdélníček tak, aby jeho delší strany  $\Delta l$  procházely rovnoběžně s libovolným tečným jednotkovým vektorem  $\mathbf{t}$  po protějších stranách plochy  $S$ . K cirkulaci vektoru intenzity podél stran  $\Delta l$  obdélníčku budou zřejmě přispívat pouze tečné složky pole  $\mathbf{E}_{1t}$ ,  $\mathbf{E}_{2t}$ . Strany kolmé k ploše  $S$  můžeme učinit tak krátkými, aby jejich příspěvek k cirkulaci byl zanedbatelný. Ze vztahu (1.61) v limitě dostáváme  $\Gamma = (\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}) \Delta l = 0$ , a tedy

$$(E_{1t} - E_{2t}) \Delta l = 0, \quad (1.81)$$

a po vykrácení  $\Delta l$  máme první ze vztahů (1.72). Použijeme-li tzv. plošné rotace definované pomocí (D 1.52), můžeme psát analogicky k (1.63)

$$\boxed{\text{Rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (1.82)$$

### 1.2.7 POISSONOVA A LAPLACEOVA ROVNICE

Vraťme se nyní k obecnému případu, kdy rozložení nábojů můžeme popsat pomocí objemové hustoty náboje  $\rho(\mathbf{r})$ . Vlastnosti elektrostatického pole jsou pak vyjádřeny parciálními diferenciálními rovnicemi

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.} \quad (1.83)$$

Řešení této soustavy čtyř rovnic (jedné vektorové dvojice rovnic a jedné skalární dvojice rovnic) je usnadněno zavedením potenciálu. Možnost jeho zavedení plyne právě z první z rovnic (1.83) a přejdeme-li od vektoru  $\mathbf{E}$  ke skalární funkci  $\varphi$  vztahem (1.50), bude tato první rovnice splněna automaticky. Zbývá pak řešit druhou z rovnic (1.83). Využijeme přitom vztahu (D 1.56), jímž byl zaveden tzv. Laplaceův operátor. V kartézských souřadnicích máme

$$\text{div grad } \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (1.84)$$

Pro potenciál dostáváme tzv. *Poissonovu rovnici*

$$\boxed{\Delta \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (1.85)$$

platnou všude tam, kde platí Gaussův zákon v diferenciálním tvaru. V bodech, kde je objemová hustota nábojů nulová, redukuje se Poissonova rovnice na *rovnici Laplaceovu*

$$\boxed{\Delta \varphi = 0} \quad (1.86)$$

nebo v kartézských souřadnicích

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.86a)$$

Poissonova a Laplaceova rovnice představují podmínky, kterým musí potenciál elektrostatického pole vždy vyhovovat. Ze známého rozložení nábojů umožňují určit potenciál (a tím i intenzitu pole) a naopak ze známého průběhu potenciálu dovolují určit soustavu nábojů tvořících zdroje tohoto potenciálu. Řešení těchto rovnic mají přitom určité obecné vlastnosti, které zkoumá matematická fyzika, a které usnadňují nalézt příslušné fyzikální řešení. Protože jde o parciální diferenciální rovnice, neurčují řešení jednoznačné. Abychom dostali jednoznačný fyzikální výsledek, musíme zadat ještě další, například tzv. *hraniční podmínky*.

Jednou ze zmíněných obecných vlastností potenciálu je to, že elektrostatický potenciál nemůže mít lokální extrém v bodech, v nichž nesídlí žádné náboje. Předpokládejme například, že uvažovaný potenciál má v bodě  $\mathbf{r}_0$  lokální maximum. Pak jistě existuje kulová plocha  $K$  se středem v bodě  $\mathbf{r}_0$ , v jejíchž všech bodech má potenciál hodnotu menší než  $\varphi(\mathbf{r}_0)$  a vektor  $\text{grad}\varphi$  míří *dovnitř* objemu ohraničeného touto plochou. Intenzita pole  $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$  míří tudíž ven z plochy  $K$ , což znamená, že  $\oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} > 0$ . Tato podmínka může být s ohledem na Gaussův zákon splněna jen tehdy, je-li uvnitř plochy  $K$  přítomen kladný náboj, jehož siločáry směřují *ven* z plochy  $K$ . Vidíme tedy, že řešení Laplaceovy rovnice nemůže mít lokální extrém v žádném vnitřním bodě uvažované oblasti. Řešení Poissonovy rovnice naopak takový extrém mít může, má-li hustota náboje v uvažovaném bodě a jeho okolí vhodný průběh.

Nemožnost existence lokálního extrému v prázdném prostoru je přímo patrná i z tvaru Laplaceovy rovnice (1.86a). V bodě extrému by musely být všechny první parciální derivace potenciálu nulové a všechny tři druhé parciální derivace buď kladné, nebo záporné, což rovnice (1.86a) vylučuje.

### 1.2.8 HUSTOTA ENERGIE ELEKTROSTATICKÉHO POLE

Nakonec vyjádříme ještě energii obecného elektrostatického pole. Viděli jsme, že interakční energie soustavy bodových nábojů může být vyjádřena pomocí potenciálu vztahem (1.60). Zobecníme-li tento výsledek pro případ spojitě rozloženého náboje umístěného v konečnu, můžeme napsat

$$W = \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (1.87)$$

Integrovaní přitom probíhá v celém prostoru. Použijeme-li Poissonovu rovnici, dostaneme

$$W = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int \varphi \Delta\varphi dV. \quad (1.88)$$

Integrál na pravé straně (1.88) vzaty v konečném objemu  $V$  ohraničeném plochou  $S$  lze pomocí Greenovy věty vektorové analýzy (D 1.69) upravit na tvar

$$\int_V \varphi \Delta\varphi dV = - \int_V |\text{grad}\varphi|^2 dV + \oint_S (\varphi \text{grad}\varphi) dS. \quad (1.89)$$

Bude-li se nyní plocha  $S$  rozpínat do nekonečna, bude tok vektoru  $\varphi \text{grad}\varphi$  touto plochou konvergovat k nule (výraz  $\varphi \text{grad}\varphi$  bude klesat jako  $1/r^3$ , element plochy poroste jako  $r^2$ ). Objemové integrování se tak rozprostře po celém prostoru a my dostaneme

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 dV = \int w_e dV. \quad (1.90)$$

Výsledek lze interpretovat tak, že elektrostatické pole je charakterizováno objemovou hustotou energie

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2}{2} \quad (1.91)$$

a interakční energii obecně rozloženého náboje můžeme najít zintegrováním této hustoty v celém objemu, kde je elektrostatické pole nenulové.

Je užitečné si ověřit, že výraz (1.91) má skutečně fyzikální rozměr objemové hustoty energie  $\text{J m}^{-3}$ . Fyzikální význam hustoty energie  $w_e$  ovšem vynikne až po zavedení obecně nestacionárního pole elektromagnetického, v němž dochází k proudění energie v prostoru a čase. Zůstáváme-li v rámci elektrostatiky, potom výrazy typu (1.60), respektive (1.87) na jedné straně a výraz typu (1.90) na straně druhé představují pouze alternativní matematické vyjádření téže skutečnosti, tj. celkové energie potřebné k vytvoření daného elektrostatického pole.

### 1.2.9 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

V tomto článku shrneme obecné zásady pro výpočet intenzity elektrostatického pole (popř. jeho potenciálu), buzené známým rozložením elektrických nábojů. Obecný výklad doplníme několika typickými a z praktického hlediska užitečnými příklady.

1. Je-li zadána objemová hustota náboje  $\rho(\mathbf{r})$ , plošná hustota náboje  $\sigma(\mathbf{r})$  nebo lineární hustota náboje  $\tau(\mathbf{r})$ , je vždy možné vypočítat intenzitu  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  a potenciál  $\varphi(\mathbf{r})$  elektrostatického pole v explicitní formě vzorců typu (1.69) a (1.70). Přitom můžeme počítat  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  i  $\varphi(\mathbf{r})$  nezávisle na sobě nebo integrovat příslušný vzorec pro  $\varphi(\mathbf{r})$  (což bývá v některých případech snazší) a pak určit intenzitu elektrostatického pole podle (1.50). O volbě konkrétního postupu rozhodne obtížnost výpočtu jednotlivých integrálů. Přitom může nastat situace, že integrál pro  $\varphi(\mathbf{r})$  diverguje, zatímco integrál pro  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  konverguje.
2. Pokud je prostorové rozložení nábojů symetrické, je nejvýhodnější použít Gaussův zákon v integrálním tvaru (1.73). Stačí najít uzavřenou plochu procházející daným bodem a obklopující zadané náboje tak, aby vektor intenzity elektrostatického pole měl na této ploše konstantní velikost a vhodný směr. Bude-li například k této ploše kolmý, platí

$$E = \frac{Q_c}{\varepsilon_0 S} \quad (1.92)$$

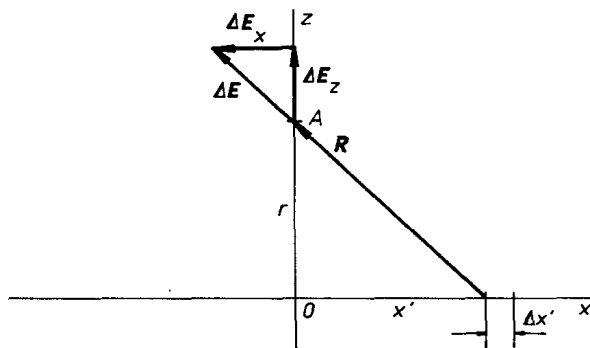
Směr vektoru  $\mathbf{E}$  je ovšem třeba určit z úvahy o symetrii soustavy.

3. Jde-li o geometricky nepravidelné nebo komplikované rozložení nábojů, mohou se předchozí způsoby ukázat nepoužitelné nebo příliš pracné. Jak bude ukázáno v článku 1.3.1, lze pak na vzdálenostech mnohem větších, než je rozměr oblasti s nenulovou hustotou náboje, určovat průběh elektrostatického

pole a potenciálu přibližně pomocí tzv. multipólového rozvoje. Přitom je obvykle možné vystačit s dipólovým, nejvýše kvadrupólovým členem.

### a) Nabitá přímka

Nechť je na přímce, kterou ztotožníme s osou  $x$ , rovnoměrně rozložen náboj s lineární hustotou  $\tau$  (viz obr. 1.16). Vyšetříme elektrostatické pole v obecném bodě  $A$  ve vzdálenosti  $r$  od přímky. Bez újmy na obecnosti můžeme bodem  $A$  vést osu  $z$ ; bod  $A$  má pak souřadnice  $(0, 0, r)$ . Intenzitu pole můžeme vypočítat integrací podle vztahu (1.69c). Vektor  $\mathbf{R}$  směřující od vybraného elementu přímky



Obr. 1.16 K odvození elektrického pole lineárního náboje.

$\Delta x'$  do bodu  $A$  má přitom složky  $(-x', 0, r)$ . Složka  $E_y = 0$  a pro  $E_x$  a  $E_z$  dostáváme

$$E_x = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{R^2} = -\frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x' dx'}{(r^2 + x'^2)^{3/2}} = 0, \quad (1.93a)$$

$$E_z = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx'}{R^2} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r dx'}{(r^2 + x'^2)^{3/2}} = \left[ \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{\sqrt{r^2 + x'^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.93b)$$

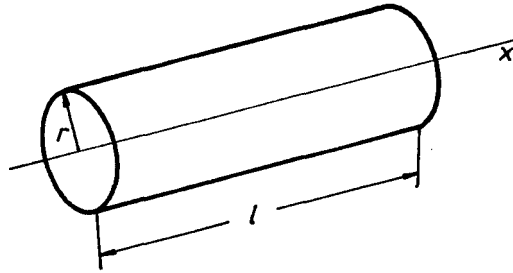
Od nuly je tedy různá jen složka  $z$  intenzity, jak bylo možné ihned usoudit ze symetrie soustavy.

Výrazy (1.93) pro intenzitu pole lze získat podstatně jednodušeji pomocí Gaussova zákona. Zvolíme-li totiž Gaussovu plochu ve tvaru válcové plochy souosé s nabitou přímkou (obr. 1.17) a uvážíme-li, že z důvodů symetrie může být od nuly různá pouze složka intenzity kolmá k této přímce, dostaneme z Gaussova zákona

$$\Phi = 2\pi r l E = \frac{\tau l}{\epsilon_0},$$

odkud okamžitě plyne výsledek (1.93). Gaussov zákon můžeme ovšem použít pouze pro nekonečnou přímku, kdy nám symetrie zaručuje, že vektor intenzity bude

k přímce kolmý a jeho velikost bude pouze funkcí vzdálenosti od přímky. V případě nabitě úsečky bychom museli použít přímého integrování v příslušných mezích a složka  $E_x$  by již nebyla obecně nulová.



Obr. 1.17 Použití Gaussova zákona k určení elektrostatického pole nekonečné nabitě přímky.

Rozložení potenciálu lze vypočítat podle vztahů (1.50) a (1.53) jako

$$\varphi = - \int E(r) dr = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} = - \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C. \quad (1.94)$$

Všimněte si, že konstantu  $C$  nemůžeme určit z podmínky, aby potenciál byl roven nule při  $r \rightarrow \infty$ . Je to opět způsobeno abstrakcí, kdy předpokládáme, že přímka je nekonečná a náboje jsou tudíž rozloženy i v nekonečnu.

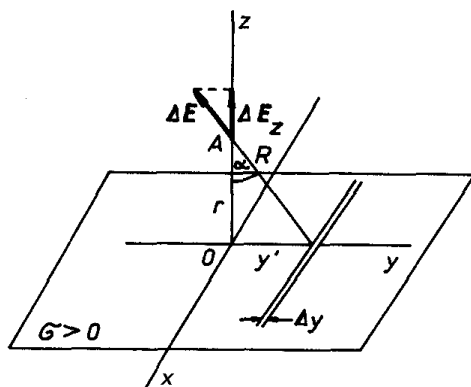
### b) Nabitá rovina

Vyšetřme elektrostatické pole rovnoměrně nabitě nekonečné rovinné plochy s plošnou hustotou náboje  $\sigma$  (viz obr. 1.18). Pro řešení tohoto problému bychom opět mohli použít vztahů (1.69b), popř. (1.70b). Počítání plošných integrálů se však můžeme vyhnout, použijeme-li výsledku předchozího příkladu. Můžeme si totiž představit uvažovanou plochu rozdělenou na úzké proužky, jejichž lineární hustota náboje  $\tau = \sigma \Delta y'$  a každý z nich přispívá v bodě  $A$  intenzitou danou vztahy (1.93). Celkovou intenzitu pak získáme integrací příspěvků těchto proužků přes jedinou souřadnici  $y'$ . Z důvodu symetrie stačí uvažovat pouze složky  $\mathbf{E}$  kolmé k rovině, které označíme  $E_z$ ; vodorovné příspěvky symetricky položených proužků se vzájemně vyruší. Platí

$$\Delta E_z = \frac{\sigma \Delta y'}{2\pi\epsilon_0 R} \cos \alpha = \frac{\sigma r \Delta y'}{2\pi\epsilon_0 (r^2 + y'^2)}. \quad (1.95)$$

Celkovou intenzitu pak vyjádříme integrálem

$$E_z = \frac{\sigma r}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{r^2 + y'^2} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \left[ \operatorname{arctg} \frac{y'}{r} \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (1.96)$$



Obr. 1.18 K odvození elektrostatického pole rovinného náboje.

K výsledku (1.96) dojdeme opět použitím Gaussova zákona. Uvážíme-li, že vzhledem k symetrii soustavy musí být vektor intenzity kolmý k nabitě rovině, můžeme s výhodou zvolit Gaussovu plochu ve tvaru válce, jehož osa je k ní také kolmá. Celkový tok povrchem válce bude pak zřejmě dán pouze tokem jeho podstavami  $\Delta S$ . Z Gaussova zákona dostáváme tedy podmínku

$$\Phi = 2\Delta S E = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0},$$

ze které ihned plyne vztah (1.96).

Průběh potenciálu dostaneme integrací (1.96) podle  $r$ . Platí proto

$$\varphi = - \int E(r) dr = - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + C. \quad (1.97)$$

Je zajímavé si všimnout, že výsledky (1.96) a (1.97) mají skutečně vlastnosti, které jsme pro pole plošně rozložených nábojů formulovali v předešlém výkladu. Zatímco potenciál je při průchodu nabitou plochou spojitý (nemá zde však derivaci), má intenzita pole nespojitost  $\sigma/\epsilon_0$ . Průběh intenzity pole a potenciálu kladně a záporně nabitě roviny jsou znázorněny na obr. 1.19, kde  $E$  má hodnotu  $\sigma/2\epsilon_0$ .

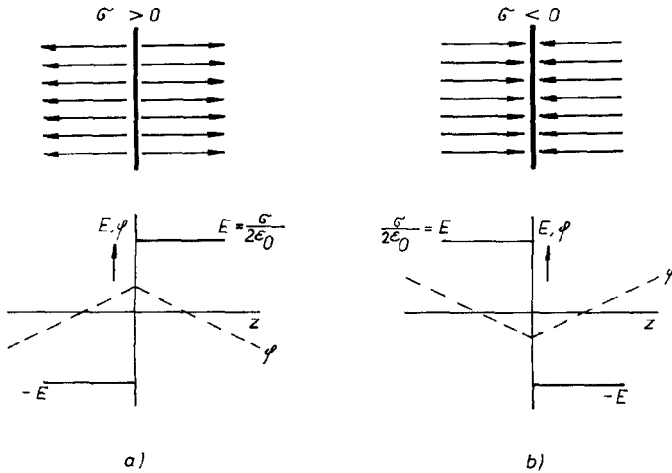
Z výsledků vidíme, že zatímco pole bodového náboje klesá se vzdáleností jako  $1/r^2$ , klesá pole přímkového náboje pomaleji podle zákona  $1/r$  a pole nabitě roviny je homogenní a na vzdálenosti od roviny nezávisí. To se může zdát překvapivé, je to však důsledkem předpokladu, že nabitá rovina je nekonečná. Může být užitečné porovnat získané výrazy pro pole a potenciály bodového náboje, nabitě přímky a roviny:

$$\text{bod:} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C,$$

přímka: 
$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}, \quad \varphi = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C,$$

rovina: 
$$E = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma, \quad \varphi = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} r + C \quad (1.98)$$

( $r$  je vzdálenost daného bodu od bodového náboje, přímky, roviny).



Obr. 1.19 Průběh elektrostatického pole roviny nabité: a) kladným nábojem, b) záporným nábojem.

### c) Dvojice rovnoběžných nabitých rovin

Pomocí principu superpozice můžeme snadno určit průběh pole a potenciálu dvojice rovnoběžných nabitých rovin. Vzdálenost mezi nimi označíme  $d$ . Předpokládejme, že obě roviny jsou rovnoměrně nabitý a že mají plošnou hustotu náboje téže velikosti, a to v jednom případě souhlasného, ve druhém nesouhlasného znamení. Pole obou rovin se superponují, takže vznikne situace znázorněná na obr. 1.20a, b.

Zvláště zajímavý je druhý případ nesouhlasně nabitých rovin, kdy homogenní elektrostatické pole velikosti

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.99)$$

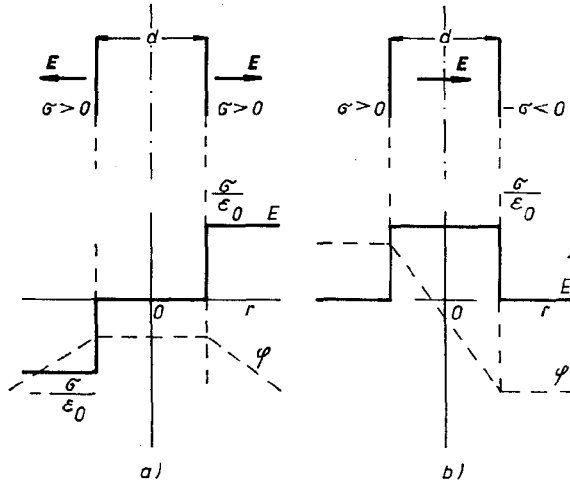
je soustředěno v prostoru mezi oběma rovinami a mimo tuto oblast je pole nulové. S takovým uspořádáním se setkáváme u deskového kondenzátoru, viz článek 1.4.5. Superponujeme-li potenciál, zjistíme, že napětí mezi deskami je rovno

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = E d \quad (1.100)$$



a průběh potenciálu v prostoru mezi deskami je lineární

$$\varphi(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} r + C. \quad (1.101)$$



Obr. 1.20 Superpozice elektrostatických polí rovin nabitých: a) souhlasně, b) nesouhlasně.

#### d) Nabitá rovinná vrstva

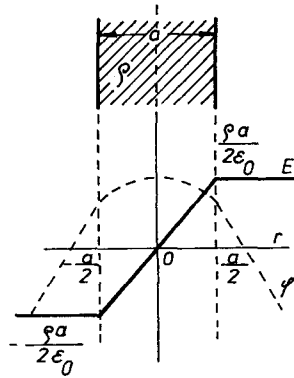
Jak víme, je představa nekonečně tenké nabité plochy fyzikální idealizací. Ve skutečnosti reálná nabitá plocha, např. rovinná, má konečnou tloušťku a může být popsána pomocí objemové hustoty náboje  $\rho$ . Uvažme proto rovinnou vrstvu tloušťky  $a$  rovnoměrně nabitou s objemovou hustotou náboje  $\rho$  (obr. 1.21). Určíme intenzitu pole a potenciál v závislosti na vzdálenosti od osové roviny. Při výpočtu pole vně vrstvy budeme počítat příspěvky tenkých rovinných vrstev, které budeme považovat za plošně nabitě s hustotou  $\Delta\sigma = \rho\Delta r$ . Pak dostaneme

$$E = \int_{-a/2}^{+a/2} \frac{\rho dr}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho a}{2\varepsilon_0}, \quad \varphi = -\frac{\rho a}{2\varepsilon_0} r + C_1. \quad (1.102)$$

Vidíme, že při průchodu vrstvou se intenzita pole změní z  $-\rho a/2\varepsilon_0$  na  $+\rho a/2\varepsilon_0$ , kde  $\sigma = \rho a$ . Na hranici vrstvy musí být intenzita pole spojitá (nemusí zde však mít derivaci!) a potenciál musí být spojitý a musí mít derivaci. Skutečně, v libovolném vnitřním bodě vrstvy můžeme spočítat pole a potenciál jako superpozici pole dvou rovinných vrstev tloušťek  $(a/2) + r$ ,  $(a/2) - r$  s tímto výsledkem:

$$E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[ \left( \frac{a}{2} + r \right) - \left( \frac{a}{2} - r \right) \right] = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r, \quad \varphi = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0} r^2 + C_2. \quad (1.103)$$

Snadno ověříme, že za podmínky  $C_1 - C_2 = \rho a^{2/8} \varepsilon_0$  řešení (1.102) a (1.103) mají při  $r = a/2$  požadované vlastnosti. Průběh intenzity pole a potenciálu jsou znázorněny na obrázku 1.21.



Obr. 1.21 Průběh elektrostatického pole rovnoměrně nabitě rovinné vrstvy.

### e) Nabitá kulová slupka

Uvažujme kulovou plochu  $K$  o poloměru  $r_0$  rovnoměrně nabitou s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ ; celkový náboj slupky označíme  $Q$ . Vyšetříme elektrostatické pole vně i uvnitř této plochy. Integrovaní podle vztahů (1.69b), (1.70b) je v tomto případě obtížné, avšak sférická symetrie úlohy nám umožňuje použít Gaussův zákon. Jako Gaussovu plochu zvolíme nejprve soustřednou kulovou plochu o poloměru  $r > r_0$ . Vzhledem k symetrii soustavy je nutné předpokládat, že vektor intenzity má v každém bodě Gaussovy plochy stejnou velikost a radiální směr, takže je k této ploše vždy kolmý. Podle Gaussova zákona dostaneme pro hledanou intenzitu

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad Q = 4\pi r_0^2 \sigma. \quad (1.104)$$

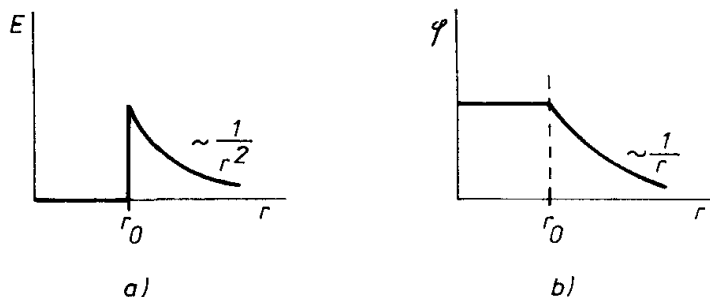
Bude-li poloměr Gaussovy plochy  $r < r_0$ , nebude v ní uzavřen žádný náboj, z čehož nutně vyplývá, že intenzita pole uvnitř plochy  $K$  je nulová.

Výraz pro průběh potenciálu vně koule dostaneme integrací vztahu (1.104); pro  $r \rightarrow \infty$  klademe  $\varphi \rightarrow 0$ , odkud vyplývá integrační konstanta  $C = 0$ , takže dostáváme

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (1.105)$$

Uvnitř koule bude potenciál zřejmě konstantní. S ohledem na jeho fyzikální smysl je třeba požadovat spojitý průběh při průchodu plochou  $K$ . Celkový průběh intenzity pole a potenciálu v závislosti na vzdálenosti od středu je znázorněn na obr. 1.22.

Všimněme si, že nespojitost intenzity při průchodu nabitou plochou má hodnotu  $\sigma/\varepsilon_0$  (jde o normálovou složku!). Z výrazů (1.104) a (1.105) je vidět, že vně koule  $K$  má elektrostatické pole stejný průběh jako pole bodového náboje  $Q$  umístěného v jejím středu, a to bez ohledu na vzdálenost od kulové plochy!



Obr. 1.22 Elektrostatické pole nabité kulové slupky: a) průběh intenzity, b) průběh potenciálu.

### f) Nabitá koule

Nyní budeme uvažovat kouli poloměru  $r_0$  nesoucí náboj  $Q$  rovnoměrně rozložený po celém jejím objemu. Pro vyšetřování elektrostatického pole lze opět s výhodou použít Gaussův zákon. Pro body vně koule je možné přesně reprodukovat postup použitý v případě kulové slupky. Intenzita a potenciál budou tedy dány vztahy (1.104) a (1.105) s tím, že náboj  $Q$  označuje nyní celkový náboj koule objemově nabitě s hustotou náboje  $\rho$ :

$$Q = \frac{4}{3} \pi r_0^3 \rho. \quad (1.106)$$

Pro vyšetření intenzity uvnitř koule zvolíme, podobně jako v předchozím případě, soustřednou Gaussovu plochu o poloměru  $r < r_0$ . Náboj  $Q'$  v ní uzavřený má velikost  $(4/3)\pi r^3 \rho$ . Podle Gaussova zákona tedy platí

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho,$$

odkud

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^3} r. \quad (1.107)$$

Potenciál uvnitř koule dostaneme integrací vztahu (1.107) ve tvaru

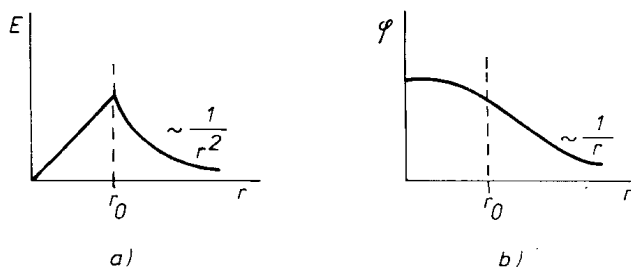
$$\varphi = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C. \quad (1.108)$$

Z požadavku spojitosti potenciálu pro  $r = r_0$  určíme hodnotu konstanty  $C$  a jako výsledek obdržíme

$$\varphi = \frac{r_0^2}{6\epsilon_0} \rho \left( 3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0} \left( 3 - \frac{r^2}{r_0^2} \right). \quad (1.109)$$

Snadno se přesvědčíme, že potenciál má v bodě  $r = r_0$  spojitě i derivace. Celkový průběh intenzity a potenciálu nabitě koule v závislosti na vzdálenosti od středu je znázorněn na obr. 1.23.

Obecně můžeme zřejmě usoudit, že jakékoliv sféricky symetrické uspořádání náboje (např. v koncentrických kulových vrstvách) v konečné oblasti prostoru se bude navenek chovat tak, jako by všechen náboj byl soustředěn ve středu této symetrie. Tato okolnost umožňuje nahradit pole nabitých koulí bodovými náboji umístěnými v jejich středu, podobně jako v případě gravitačního pole můžeme považovat sféricky symetrická nebeská tělesa za hmotné body. Naopak odchylka od pole bodového náboje (v případě gravitace od pole hmotného bodu) svědčí o narušení sférické symetrie, což má velký praktický význam. K tomuto poznatku dospěl již I. Newton pracným integrováním, nemaje po ruce Gaussův zákon.



Obr. 1.23 Elektrostatické pole homogenně nabitě koule: a) průběh intenzity, b) průběh potenciálu.

### g) Nabitá nekonečná válcová plocha a váleček

Při výpočtu intenzity pole a potenciálu plošně nebo objemově nabitého nekonečného válce můžeme opět využít Gaussův zákon a postupovat obdobně jako u náboje s kulovou symetrií. Vektor intenzity pole bude zřejmě kolmý k válcové ploše a Gaussovu plochu můžeme volit jako koaxiální válcovou plochu libovolné délky  $l$ , procházející daným bodem ve vzdálenosti  $r$  od osy válce. Je-li poloměr válcové plochy  $r_0$ , můžeme zkoumat pole uvnitř válce ( $r \leq r_0$ ) a vně válce ( $r > r_0$ ). Lze očekávat, že v případě cylindricky symetrického rozdělení náboje bude pole vně válce ekvivalentní poli nabitě přímky totožné s osou válce. Pro úplnost uvedeme získané výsledky; tak dostáváme pro váleček povrchově nabitý s hustotou náboje  $\sigma$

$$\begin{aligned} r \leq r_0: \quad E = 0, \quad \varphi = C_1, \\ r > r_0: \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{r_0}{r}, \quad \varphi = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} r_0 \ln r + C_2 \end{aligned} \quad (1.110)$$

a pro váleček objemově nabitý s hustotou náboje  $\rho$

$$\begin{aligned}
 r \leq r_0: \quad E &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} r, & \varphi &= -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C_3, \\
 r > r_0: \quad E &= \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r_0^2}{r}, & \varphi &= -\frac{\rho}{2\epsilon_0} r_0^2 \ln r + C_4.
 \end{aligned}
 \tag{1.111}$$

Integrační konstanty nemůžeme tentokrát určit z podmínky  $\varphi \rightarrow 0$  při  $r \rightarrow \infty$  podobně jako u nabitě koule. Je to důsledek přijaté idealizace nekonečného válce s náboji v nekonečnu. Tato okolnost však není na závadu, neboť volba konstanty ve výrazu pro potenciál neovlivní fyzikální výsledek.

### ***h) Pole a potenciál na ose nabitě kružnice***

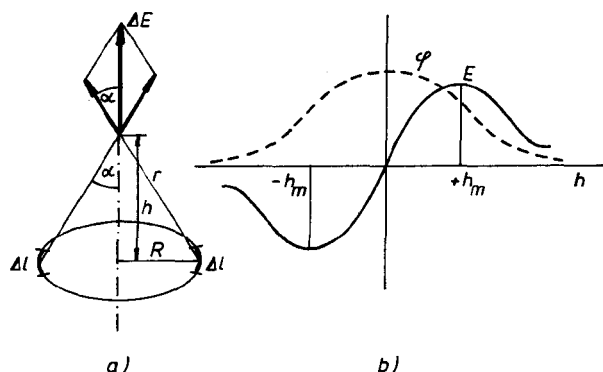
Určeme intenzitu elektrostatičkého pole a potenciál na ose kružnice poloměru  $R$ , na níž je rovnoměrně rozložen náboj lineární hustoty  $\tau$ . Budeme sčítat příspěvky k vektoru intenzity pole vždy od dvojice protilehlých malých lineárních nábojů  $\tau \Delta l$  na kružnici (viz obr. 1.24a). Vektor intenzity bude zřejmě ležet v ose kružnice a pro jeho velikost v bodě o výšce  $h$  nad rovinou kružnice dostaneme

$$E = \int_0^{\pi R} 2 \cos \alpha \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\tau dl}{h^2 + R^2} = \frac{\tau R h}{2\epsilon_0 (h^2 + R^2)^{3/2}}.
 \tag{1.112}$$

Integrací získáme potenciál

$$\varphi = \frac{\tau R}{2\epsilon_0 \sqrt{h^2 + R^2}}.
 \tag{1.113}$$

Průběh veličin  $E$  a  $\varphi$  v závislosti na výšce  $h$  je znázorněn na obr. 1.24b. Všimněme si změny orientace pole při průchodu rovinou kružnice a extrémů ve vzdálenostech  $h_m = R/\sqrt{2}$ .



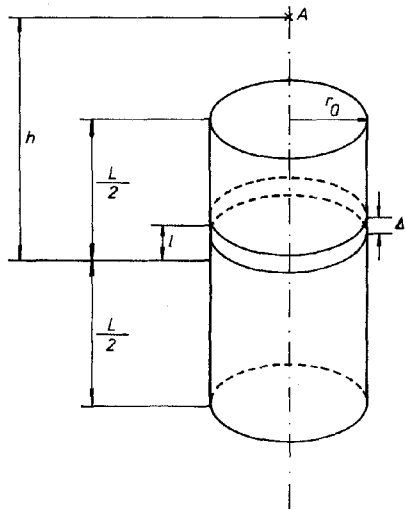
Obr. 1.24 a) K odvození elektrostatičkého pole na ose nabitě kruhové smyčky, b) průběh intenzity elektrostatičkého pole a potenciálu na ose nabitě kruhové smyčky.

**i) Elektrostatické pole na ose válcové elektrody**

Výsledek získaný v předchozím příkladu můžeme uplatnit například při výpočtu pole na ose válce konečné délky. Mějme válcovou plochu délky  $L$  a poloměru  $R$  plošně nabitou s hustotou náboje  $\sigma$  (obr. 1.25). Označme vzdálenost bodu na ose této plochy od středu válce jako  $h$ . Válcovou plochu můžeme rozřezat na koaxiální pásy výšky  $\Delta l$  a považovat je za nabitě kružnice o lineární hustotě náboje  $\sigma \Delta l$ . Použitím vztahu (1.113) a jeho integrací pak dostaneme

$$\varphi = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{dl}{\sqrt{R^2 + (h-l)^2}} = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \ln \frac{h + L/2 + \sqrt{R^2 + (h + L/2)^2}}{h - L/2 + \sqrt{R^2 + (h - L/2)^2}}. \quad (1.114)$$

Intenzitu pole určíme snadno jako  $E(h) = -d\varphi/dh$  a ověříme, že ve středu válce je pole nulové a potenciál maximální.

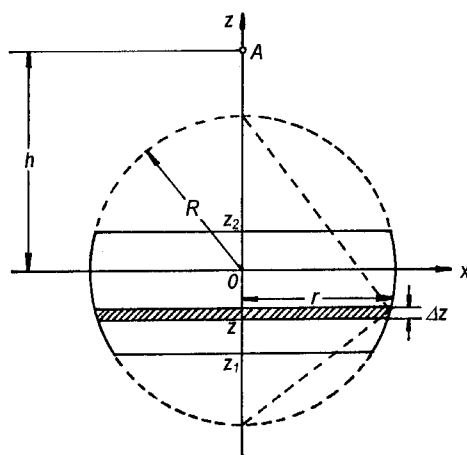


Obr. 1.25 K výpočtu elektrostatického pole na ose povrchově nabitého válce.

**j) Elektrostatické pole na ose kulového pásu**

Mějme kulovou plochu poloměru  $R$  nabitou s plošnou hustotou náboje  $\sigma$ . Vyřízeme z ní kulový pás vymezený souřadnicemi  $z_1, z_2$  (obr. 1.26). Určíme potenciál na ose pásu ve výšce  $h$  měřené od středu kulové plochy. Uvažovaný kulový pás rozřezeme na proužky velmi malé výšky  $\Delta z$  o souřadnici  $z$  a poloměru  $R$ . Vezmeme v úvahu, že obsah plochy takového kulového proužku je roven  $\Delta S = 2\pi R \Delta z$ . Opět použijeme výraz pro potenciál na ose nabitě kružnice (1.113), kam dosadíme za lineární hustotu  $\tau$

$$\Delta \tau = \frac{2\pi R \sigma \Delta z}{2\pi r} = \frac{R \sigma \Delta z}{r}.$$



Obr. 1.26 K výpočtu elektrostatického pole na ose kulového pásu.

Dále použijeme Euklidovu větu, podle níž  $r^2 = (R + z)(R - z)$ . Hledaný potenciál se pak rovná vztahu

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + (h - z)^2}} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{R^2 + h^2 - 2hz}} \\ &= \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0 h} \left( \sqrt{R^2 + h^2 - 2hz_1} - \sqrt{R^2 + h^2 - 2hz_2} \right). \end{aligned} \quad (1.115)$$

Intenzitu pole stanovíme opět jako  $E(h) = -d\varphi/dh$ .

Jako zvláštní případ můžeme určit například potenciál vytvářený polokulovou slupkou ( $z_1 = -R, z_2 = 0$ ) ve středu kulové plochy ( $h = 0$ ) a ve vrcholu kulové plochy ( $h = R$ ). Po pečlivém limitování (1.115) a výrazu pro intenzitu pole dostaneme

$$\varphi(0) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}, \quad E(0) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}, \quad \varphi(R) = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0} (2 - \sqrt{2}), \quad E(R) = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} (2 - \sqrt{2}). \quad (1.116)$$

Bude-li kulová plocha uzavřena ( $z_1 = -R, z_2 = R$ ), dostaneme uvnitř koule nulové pole a konstantní potenciál  $\varphi = \sigma R/\varepsilon_0$ , vně koule potenciál klesající s  $h$  jako  $\varphi = \sigma R^2/\varepsilon_0 h$  a intenzitu pole  $E = \sigma R^2/\varepsilon_0 h^2$ .

### k) Elektrostatická energie nabitě koule

Určíme elektrostatickou interakční energii spojitěho uspořádání náboje, jaké představují plošně nabitá kulová slupka a objemově nabitá koule poloměru  $R$ . V případě plošně nabitě kulové slupky využijeme znalosti potenciálu na jejím povrchu, který je roven

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

a dále vztahu (1.87) upraveného na plošné integrování. Potom

$$W = \frac{1}{2} \oint_S \varphi \sigma \, dS = \frac{1}{2} \varphi Q = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (1.117)$$

V případě objemově nabité koule si připomeneme definici, podle níž je energie soustavy nábojů dána prací potřebnou k vytvoření této soustavy, přičemž nezáleží na pořadí sblížování nábojů. Můžeme proto například předpokládat, že objemově nabitá koule vznikla tak, že postupně přibírala koncentrické vrstvy náboje, podobně jako se vytváří velká sněhová koule. Dosáhne-li koule poloměru  $r$  a náboje  $q$  a přibere další vrstvu náboje tloušťky  $dr$ , zvýší se její energie o

$$dW = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \, dq}{r}. \quad (1.118)$$

S kulovým nábojem  $q = (4/3)\pi r^3 \rho$  a přírůstkem náboje  $dq = 4\pi r^2 \rho dr$  zacházíme jako se dvěma bodovými náboji. Integrací výrazu (1.118) v mezích  $0 \div R$  dostaneme

$$W = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}. \quad (1.119)$$

Kdybychom považovali elementární nabitou částici (například elektron) za kulový náboj a přirovnali její celkovou energii danou relativistickým vztahem (2.18)  $W = mc^2$  ( $m$  je hmotnost částice,  $c$  rychlost světla ve vakuu) k energii elektrostatičké (1.119), mohli bychom odhadnout rozměry této částice. Při tomto řádovém odhadu se koeficient  $3/5$  zpravidla neuvažuje; potom dostáváme tak zvaný klasický poloměr elektronu rovný

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} = 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad (1.120)$$

Je ovšem třeba podotknout, že zřejmě nejde o skutečný poloměr elektronu, nýbrž pouze o kombinaci základních konstant, která má rozměr délky a může hrát určitou roli ve fyzice elementárních částic. Podle výsledků dosud provedených experimentů se elektron chová jako bodová částice i při rozměrech značně menších, než je tento „klasický poloměr“. Na druhé straně je zřejmé, že kdyby se rozměry částice zmenšovaly k nule, její elektrostatičká energie by musela narůstat do nekonečna.

## 1.3 ELEKTRICKÝ DIPÓL

### 1.3.1 VLASTNOSTI ELEKTRICKÉHO DIPÓLU

Elektrickým dipólem se obvykle rozumí soustava dvou bodových nábojů  $Q_- < 0$ ,  $Q_+ > 0$  stejné velikosti  $Q$ , ale opačného znamení, umístěných v bodech  $\mathbf{r}_-$ ,  $\mathbf{r}_+$  ve