Jana Coufalová

MATEMATIKA S DIDAKTIKOU
PRO 2. ROČNÍK UČITELSTVÍ 1. STUPNĚ ZŠ

ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI

Jana Coufalová

Matematika s didaktikou

pro 2. ročník učitelství 1. stupně ZŠ

Matematika s didaktikou pro 2. ročník učitelství 1. stupně ZŠ

doc. PaedDr. Jana Coufalová, CSc.

Odborní recenzenti:
PhDr. M. Kaslová
doc. J. Horálková, CSc.

Typografická úprava:
Kristina Rumpíková

Grafický návrh obálky:
Tereza Saitzová

Vydala:
Západočeská univerzita v Plzni
P.O.Box 314, Univerzitní 8, 306 14 Plzeň

5. vydání (1. elektronické), 139 stran
Pořadové číslo: 2238, ediční číslo: 55-029-16
Plzeň 2016

ISBN 978-80-261-0696-8
ISBN 978-80-261-0650-0 (tištěná verze)
DOI https://doi.org/10.24132/ZCU.2016.06968

Obsah

Předmluva

Milí studenti,

ve studiu aritmetiky jste se již seznámili s přirozenými čísly a operacemi s nimi. Učební text, který právě otvíráte, Vám pomůže poznat i další číselné obory - čísla celá, racionální a reálná.

Vedle teoretického přístupu k budování těchto číselných oborů se seznámíte i s metodickými postupy, kterými se číselné obory zavádějí na základní škole. Učivo 1. stupně je rozpracováno podrobně, látka, která přesahuje rámec 1. stupně ZŠ, je podávána pouze informativně. Poslední kapitola pojednává o řešení slovních úloh. Historické poznámky v závěru každé kapitoly Vám ukážou, jak se rozvíjela jedna z oblastí lidského poznání.

Celý text je doplněn řadou úloh s výsledky. Při pozorném studiu skripta by Vám řešení úloh nemělo dělat potíže. V textu samotném najdete i řešené úlohy, které usnadňují pochopení probíraného učiva a ukazují jeho aplikace.

Text byl psán se snahou o co největší srozumitelnost, aby mohl být využíván i pro samostatné studium. Proto je k symbolickým zápisům připojen slovní doprovod. Nepředpokládá se, že se budete učit reprodukovat všechny důkazy, které text obsahuje. Při studiu byste se měli snažit o pochopení jednotlivých prováděných kroků. Uvidíte, že poměrně jednoduchý matematický aparát, který jste poznali v předchozím studiu, umožňuje vyvozovat a dokazovat celou řadu dalších poznatků.

Didaktická část textu se neváže na žádné konkrétní učebnice. Ukazuje různé přístupy k učivu, dává náměty pro jeho zpracování. Snažte se proto nechápat uváděné postupy jako závazná schémata, ale berte je jako podněty pro vlastní zamyšlení a tvůrčí činnost.

Děkuji všem, kdo se na vydání učebního textu podíleli, především recenzentům Doc. Jaroslavě Horálkové, CSc. a PhDr. Michaele Kaslové z pedagogické fakulty UK v Praze za pozorné přečtení textu a cenné náměty a připomínky. Zvláštní poděkování patří paní Ludmile Voldřichové za přepsání mimořádně náročného matematického textu a pečlivé nakreslení obrázků užitím počítače.

V Plzni 15. září 1992 Autorka

1. Celá čísla

1.1 Celá čísla v učivu základní školy

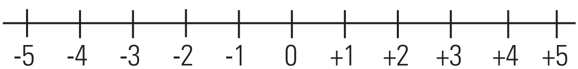
Na základní škole jste se zřejmě seznámili s celými čísly prostřednictvím určování odchylky od stanoveného normálu. Takovým normálem může být např. 0˚C na teploměru, jistý střední stav hladiny vodního toku nebo čára ponoru na boku lodi. Hodnoty vyšší než stanovený normál označujeme kladnými čísly, nižší hodnoty zápornými čísly. Od této představy se odvíjí na ZŠ znázornění celých čísel na číselné ose. Popsaný postup lze srovnat s ordinálním pojetím přirozených čísel.

Kardinálnímu pojetí odpovídá modelování celých čísel pomocí barevných kamenů. Zájemci se mohou podrobněji s tímto méně užívaným způsobem seznámit např. v učebnici [7] a metodické příručce [8]. Kladná čísla se zde modelují pomocí černých kamenů a záporná čísla pomocí barevných kamenů.

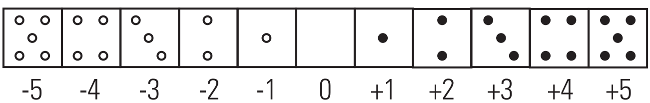
Výhody a nevýhody obou přístupů si ukážeme při konkrétních činnostech s celými čísly. Zároveň si v této části textu připomeňte, jak se s celými čísly počítá.

1. <u>Znázornění uspořádání celých čísel</u>

a) body na číselné ose



b) barevné kameny

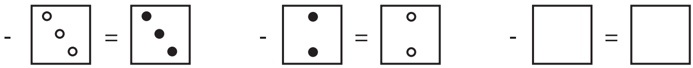


2. <u>Určení opačného čísla</u>

a) Na číselné ose jsou obrazy opačných čísel souměrně sdružené podle počátku.

b) Při užití barevných kamenů znázornit opačné číslo znamená provést změnu barvy.

Např.



-(-3) = +3, -(+2) = -2, -0 = 0

Znovu si připomeňme, že znaménko " - " má v matematice tři významy:

- určuje kvalitu čísla, označuje číslo záporné, znaménko " - " je součástí zápisu čísla (- 2, - 7, - 31, ...);
- je znakem pro operaci odčítání čísel, pokynem k provedení jistého výpočtu (5 - 4, 7 - (- 2), ...);
- je znakem pro operátor opačné číslo. Znaménko " - " chápeme potom jako pokyn k provedení změny kvality (přejdeme od daného bodu na číselné ose k bodu souměrně sdruženému podle počátku, změníme barvu kamene).

3. <u>Absolutní hodnota</u>

a) Na číselné ose udává absolutní hodnota vzdálenost obrazu čísla od počátku.

b) Při užití barevných kamenů udává absolutní hodnota počet kamenů (bez ohledu na barvu).

Např. |- 5| = 5, |0| = 0, |+ 5| = + 5

4. <u>Porovnávání celých čísel</u>

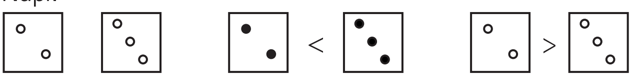
a) Pro porovnávání celých čísel pomocí číselné osy platí stejné pravidlo jako pro porovnávání čísel přirozených, tj. menší číslo je znázorněno vlevo od většího čísla.

b) Při porovnávání celých čísel užitím barevných kamenů musíme rozlišit tři případy:

1) Jsou-li obě čísla kladná, porovnáváme přirozená čísla (počet kamenů).

2) Jsou-li obě čísla záporná, změníme barvu kamenů, porovnáme čísla přirozená a změníme znaménko nerovnosti:

Např.



3) Porovnáváme-li čísla různé kvality, platí, že záporné číslo je vždy menší než kladné číslo.

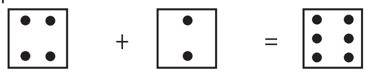
5. Sčítání celých čísel

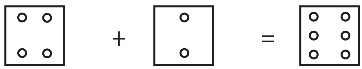
Při znázornění číselnou osou uplatníme stejný postup sčítání pomocí dvou os, který jsme použili u čísel přirozených. Zopakujte si ho na sčítacím pravítku.

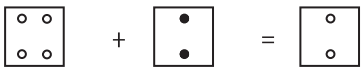
Sčítání pomocí barevných kamenů si můžeme představit jako sčítání dobrých bodů (černé kameny) a trestných bodů (barevné kameny) ve hře. Opět rozlišíme tři případy:

a) Jsou-li obě čísla kladná, tj. jsou-li obě znázorněna černými kameny, sečteme počet černých kamenů a součet znázorníme opět černými kameny.
b) Jsou-li obě čísla záporná, postupujeme analogicky, ale pracujeme s barevnými kameny.
c) Sčítáme-li kladné a záporné číslo, utvoříme nejprve dvojice z černých a barevných kamenů, ty vyřadíme a součet znázorníme zbylými kameny.

Například:

a)  $(+4) + (+2) = (+6)$

b)  $(-4) + (-2) = (-6)$

c)  $(-4) + (+2) = (-2)$

vyřadíme 

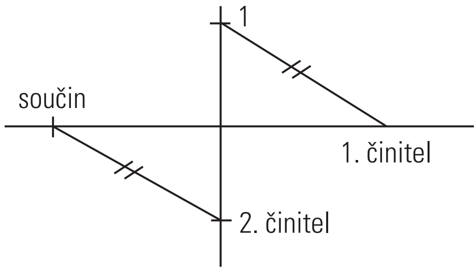
6. Odčítání celých čísel

Odčítání celého čísla se zavádí jako přičítání čísla k němu opačného.

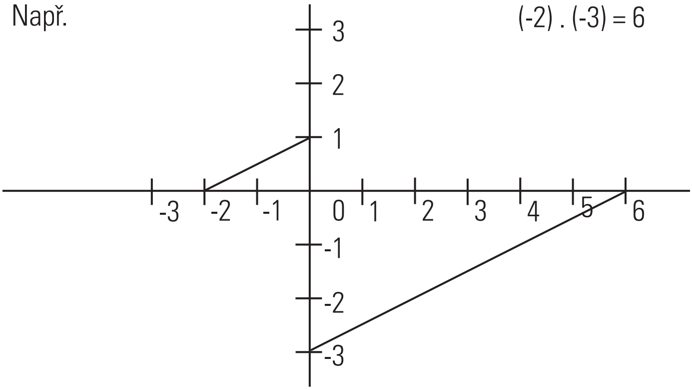
Např. $7 - (-5) = 7 + (+5) = 12$
$7 - (+5) = 7 + (-5) = 2$

7. Násobení celých čísel

Víme, již, že násobení přirozených čísel lze zavádět jako sčítání sobě rovných sčítanců: $4 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$. Obdobně můžeme postupovat i při násobení kladného a záporného čísla: $4 \cdot (-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = (-20)$. Uvedený postup však nelze uplatnit v případě násobení dvou záporných čísel. Žákům se proto zpravidla jen sdělí, že: „Minus krát minus dává plus“. Takovému mechanickému osvojení pravidla se můžeme vyhnout, když žáky seznámíme s geometrickou interpretací násobení celých čísel. Využijeme k tomu dvou číselných os a postupu na schématu:



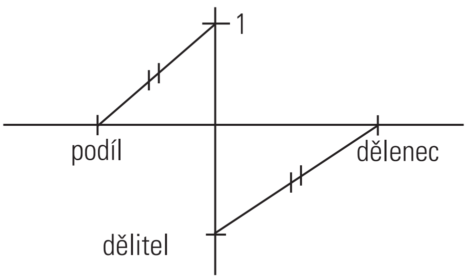
Např. $(-2) \cdot (-3) = 6$



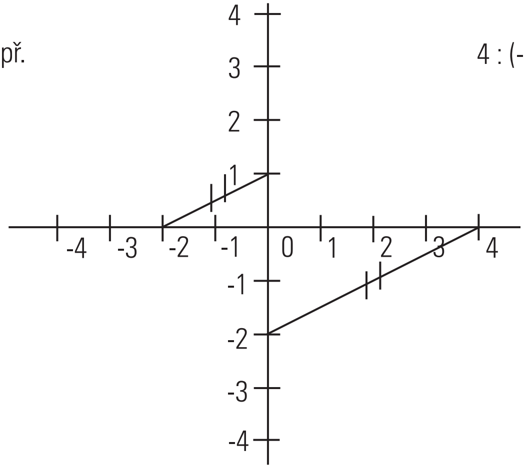
(Na ose x znázorníme 1. činitele, na ose y 2. činitele. Spojíme obraz 1. činitele s bodem [0, 1], se spojnicí vedeme rovnoběžku obrazem 2. činitele. Průsečík této rovnoběžky s osou x je obrazem hledaného součinu.)

8. Dělení celých čísel

Obdobně jako lze geometrickou cestou najít součin, lze pomocí dvou číselných os určit také podíl dvou celých čísel. Postupujeme podle následujícího schématu:



Např. $4 : (-2) = (-2)$



(Na ose x znázorníme dělence, na ose y dělitele. Oba body spojíme a vedeme s touto spojnicí rovnoběžku bodem [0, 1]. Průsečík rovnoběžky s osou x je obrazem hledaného podílu).

Výhodou modelování celých čísel pomocí kamenů je větší názornost ve srovnání s užitím číselné osy. Žáci mohou manipulovat s kameny a objevovat určitá obecná pravidla. Proto je tento model vhodný zejména v první fázi počítání s celými čísly. Postupně se však stává těžkopádným (např. pravidla o porovnávání celých čísel). Práce s číselnou osou je náročnější na abstraktní myšlení, ale efektivnější a obecnější. Získané poznatky může žák uplatnit i v dalších číselných oborech.

1.2 Konstrukce oboru integrity celých čísel

V předchozí kapitole jsme si stručně připomněli to, co jste se o celých číslech dozvěděli již na základní škole. I během dalšího studia jste zřejmě představu celých čísel spojovali se stupnicí teploměru. Nyní se pokusíme budovat množinu celých čísel matematickými prostředky, které jste si osvojili v 1. ročníku.

Jedinou číselnou množinou, kterou jsme zatím zavedli, je pološokruh přirozených čísel. Vyjdeme proto z množiny N. Utvoříme dvojice přirozených čísel ($[a, b] \in N \times N$). Dále definujeme relaci ~ mezi dvojicemi přirozených čísel:

Def. 1.1.: Na kartézském součinu $N \times N$ definujeme relaci ~ předpisem

$$[a, b] \sim [c, d] \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Určíme vlastnosti této relace.

a) Ověříme, zda je relace reflexivní, tj. zda pro všechny dvojice $[a,b] \in N \times N$ platí $[a,b] \sim [a,b]$. Podle definice relace ~ to znamená, že by muselo platit
$a + b = b + a$.

Protože a, b jsou přirozená čísla a sčítání přirozených čísel je komutativní, požadovaná vlastnost je splněna. Relace je <u>reflexivní</u>. Obdobně budeme postupovat u dalších vlastností.

b) Ověříme, zda je relace symetrická, tj. zda pro libovolné dvojice [a,b], [c,d] přirozených čísel platí:

$$[a,b] \sim [c,d] \Rightarrow [c,d] \sim [a,b].$$

Podle definice relace ~ to znamená

$$a + d = b + c \Rightarrow c + b = d + a.$$

Vzhledem ke komutativnosti operace sčítání přirozených čísel a symetričnosti relace rovnost v N je to splněno. Relace ~ je <u>symetrická</u>.

c) Aby relace ~ byla tranzitivní, musí pro libovolné tři dvojice přirozených čísel [a,b], [c,d], [e,f] platit:
$$[a,b] \sim [c,d] \wedge [c,d] \sim [e,f] \Rightarrow [a,b] \sim [e,f].$$

Podle definice relace ~ to znamená

$$(a + d = b + c \wedge c + f = d + e) \Rightarrow a + f = b + e.$$

Vyjdeme z předpokladu

$$a + d = b + c$$
$$\underline{c + f = d + e.}$$

Po sečtení

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e).$$

Odtud po úpravách dostaneme

$$a + f = b + e.$$

Relace ~ je <u>tranzitivní</u>.

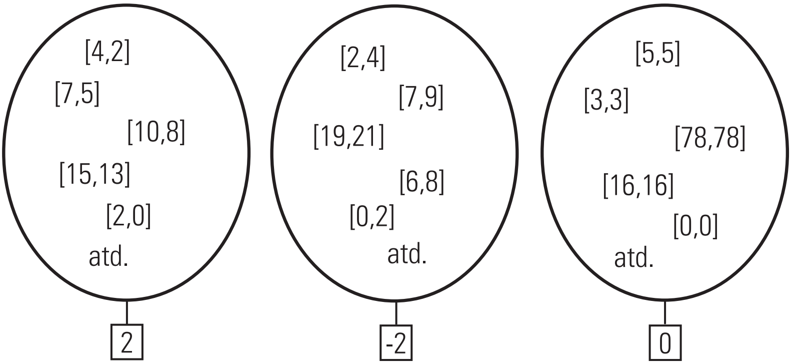
Relace ~ je reflexivní, symetrická a tranzitivní, je tedy relací ekvivalence na kartézském součinu N x N. Připomeňme si, že každá relace ekvivalence definovaná na množině M určuje rozklad množiny M na třídy navzájem ekvivalentních prvků. Proto také relace ~ určuje rozklad kartézského součinu N x N na třídy navzájem ekvivalentních uspořádaných dvojic.

Př. *Zvolme si například uspořádanou dvojici [4,2]. S ní je v relaci ~ dvojice [5,3], protože 4 + 3 = 2 + 5, dvojice [7,5], protože 4 + 5 = 2 + 7, dvojice [2,0], protože 4 + 0 = 2 + 2 ap. Takových dvojic bychom mohli vytvořit nekonečně mnoho. U všech by platilo, že mají první složku o 2 větší než druhou složku. Všechny takové dvojice jsou navzájem ekvivalentní, všechny patří do téže třídy rozkladu.*

Každou třídu rozkladu N x N chápeme jako celé číslo.

Def. 1.2.: Množinou celých čísel *C* nazýváme množinu tříd rozkladu vytvořeného relací ~ definovanou na kartézském součinu N x N definicí 1.1.

Např.



Pozn. *Abychom v dalším textu odlišili čísla přirozená a čísla celá, budeme označovat přirozená čísla malými písmeny a celá čísla tučně velkým písmem (**A, B, 0, 1,*** ...).

1.3 Sčítání a násobení celých čísel

Po definování množiny celých čísel je třeba definovat také operace s nimi. Sčítání i násobení celých čísel zavedeme pomocí reprezentantů, tj. dvojic přirozených čísel, které zastupují příslušnou třídu rozkladu.

<u>Sčítání celých čísel</u>

Def. 1.3.: Nechť **A, B** jsou libovolná celá čísla s reprezentanty [a,b] $\in$ **A**, [c,d] $\in$ **B**. Součtem **A + B** celých čísel **A, B** nazýváme celé číslo reprezentované uspořádanou dvojicí [a + c, b + d].

Máme-li tedy sečíst dvě celá čísla, tj. dvě třídy rozkladu N x N, zvolíme jejich reprezentanty, pomocí nich utvoříme dvojici [a + c, b + d] a ta bude patřit do třídy,