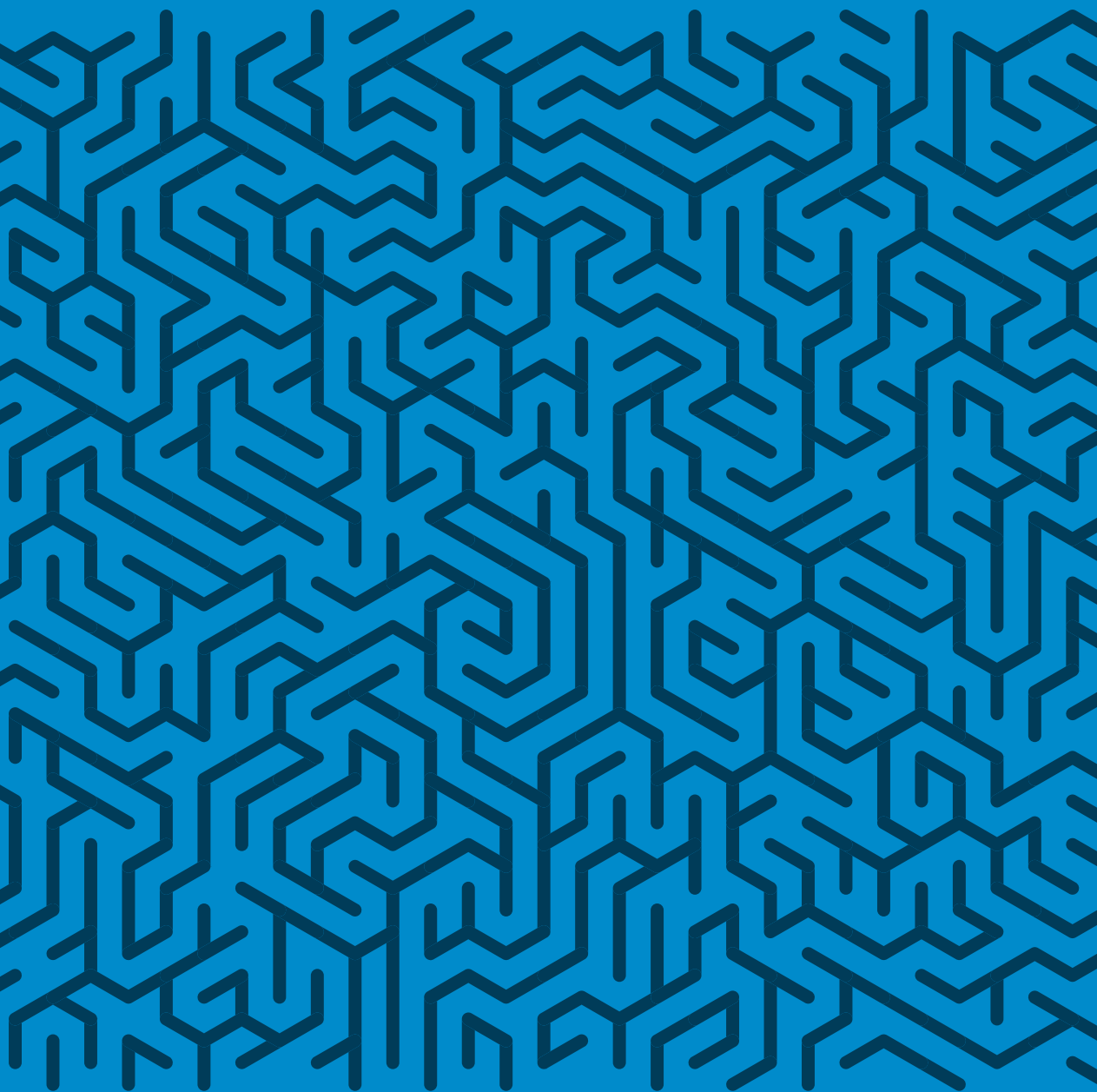


NAĎA VONDROVÁ A KOLEKTIV

MATEMATICKÁ SLOVNÍ ÚLOHA



MEZI MATEMATIKOU,
JAZYKEM A PSYCHOLOGIÍ

KAROLINUM

Matematická slovní úloha

Mezi matematikou, jazykem a psychologií

Naďa Vondrová a kolektiv

Recenzovali:

doc. PaedDr. Petr Eisenmann, Ph.D.

doc. PhDr. Eva Jandová, Ph.D.

prof. PhDr. Mgr. Tomáš Janík, Ph.D.

Autorský kolektiv:

Naďa Vondrová

Radka Havlíčková

Milada Hirschová

Martin Chvál

Jarmila Novotná

Anna Páchová

Irena Smetáčková

Martina Šmejkalová

Veronika Tůmová

Vydala Univerzita Karlova, Nakladatelství Karolinum

Praha 2022

Sazba Vydavatelský servis Plzeň

Vydání první

Monografie byla napsána s finanční podporou projektu GAČR 16-06134S

Slovní úlohy jako klíč k aplikaci a porozumění matematickým pojmům.

© Univerzita Karlova, 2019

Naďa Vondrová, 2019

ISBN 978-80-246-4516-2

ISBN 978-80-246-4531-5 (online : pdf)



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Úvod	9
1 Teoretická východiska výzkumu	15
1.1 Charakteristika slovní úlohy	15
1.1.1 Povaha matematických a jazykových pojmů	16
1.1.2 Terminologie	17
1.2 Model procesu řešení slovních úloh	17
1.3 Některé příčiny žákovských obtíží	19
1.4 Zkoumání jazykové stránky slovních úloh	22
2 Výběr parametrů a tvorba úloh	25
2.1 Způsob analýzy slovních úloh	25
2.2 Parametry zadání slovních úloh	26
2.2.1 Zkušenostní kontext úlohy a způsob zadání	26
2.2.2 Obecné jazykové rysy slovních úloh	27
2.2.3 Matematické parametry	34
2.2.4 Výběr parametrů	37
2.3 Tvorba úloh	37
3 Metodologie	41
3.1 Výběr a popis škol	41
3.2 Rámcová strategie sběru dat	41
3.3 Popis souboru testovaných žáků	43
3.4 Vstupní testování	44
3.4.1 Koncepce vstupních testů	44
3.4.2 Administrace a vyhodnocení vstupních testů a dotazníků	44
3.4.3 Tvorba výkonnostně srovnatelných skupin	45
3.5 Rámcová koncepce testů pro hlavní testování	46
3.5.1 Tvorba testových sešitů pro HT1 a HT2	46
3.5.2 Příprava testů na základě výsledků předchozí vlny testování	47
3.5.3 Výběr úloh do jednotlivých testování	48
3.6 Administrace testů	48
3.7 Hodnocení žákovských řešení	48
3.8 Statistické analýzy	49
3.8.1 Využití výsledků vstupního testování	49
3.8.2 Parametrizace úloh hlavního testování	50
3.8.3 Postupy kotvení v IRT analýzách	50
3.8.4 Analýzy úloh napříč testováními a ročníky	51
3.8.5 Statistické testování rozdílů obtížnosti a diskriminace variant úloh	52
3.9 Způsob prezentace výsledků zjišťování rozdílů mezi variantami úloh	52
3.10 Rozhovory s žáky	54
4 Soubor testovaných žáků z hlediska některých charakteristik	57
4.1 Charakteristika žáků škol A až D na základě údajů z dotazníku	57
4.2 Latentní schopnost žáků účastnících se výzkumu	59
4.2.1 Popis manifestních proměnných	59
4.2.2 Vzájemné korelace manifestních proměnných	60
4.2.3 Souvislost latentní schopnosti žáků s manifestními proměnnými u žáků prvních čtyř škol	61
4.3 Shrnutí	62

5	Zkušenostní kontext	65
5.1	Související výzkum	66
5.1.1	Realita versus matematika	66
5.1.2	Typologie slovních úloh z hlediska kontextu	67
5.1.3	Vztah mezi řešením slovních úloh a problémových situací v reálném životě	68
5.1.4	Realita: motivační, nebo kognitivní efekt?	70
5.1.5	Obeznamenost se sférami reálného života a vztah řešení matematických a reálných problémů – výsledky dotazníku	71
5.2	Popis použitých úloh	73
5.3	Výsledky	74
5.3.1	Skupina úloh se sci-fi a fantasy kontextem	74
5.3.2	Skupina úloh s politicko-ekonomickým kontextem	80
5.3.3	Skupina úloh o součtu tras: diskuse s úlohou TIMSS	83
5.3.4	Skupina úloh o směsích	84
5.3.5	Skupina úloh s konceptuálním a procesuálním zadáním	85
5.3.6	Skupina nezařazených úloh	88
5.4	Diskuse a závěr	90
6	Nadbytečné informace v zadání slovní úlohy (délka textu)	93
6.1	Související výzkum	94
6.2	Popis použitých úloh	96
6.3	Výsledky	98
6.3.1	Nadbytečné informace na začátku zadání	98
6.3.2	Nadbytečné informace uvnitř zadání	100
6.3.3	Vysvětlující text	106
6.3.4	Úlohy s nadbytečným numerickým údajem	110
6.4	Diskuse a závěr	120
6.4.1	Parametr nadbytečné informace	120
6.4.2	Parametr nadbytečný numerický údaj	121
7	Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy	123
7.1	Související výzkum	123
7.2	Popis použitých úloh	125
7.3	Výsledky	126
7.3.1	Vyjádření čísel	126
7.3.2	Ilustrační obrázek	128
7.3.3	Ilustrační či reprezentační obrázek s reduplikovanou informací	130
7.3.4	Informační obrázek	133
7.3.5	Řešitelský obrázek	145
7.3.6	Řešitelské využití zadaných obrázků a spontánní kreslení obrázků vlastních	150
7.4	Diskuse a závěr	154
8	Jazyková explicitnost zadání slovní úlohy	157
8.1	Související výzkum	157
8.1.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku	157
8.1.2	Nepravá implikace	158
8.1.3	Okazionalismy	159
8.1.4	Ustálenost	160
8.2	Popis použitých úloh	160
8.2.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku	160
8.2.2	Nepravá implikace	161
8.2.3	Okazionalismy	162
8.2.4	Ustálenost	162
8.3	Výsledky	163

8.3.1	Přítomnost modálního výrazu, pořadí údajů ve větě (funkční větná perspektiva), explicitní vyjádření celku	163
8.3.2	Nepravá implikace	171
8.3.3	Okazionalismy	174
8.3.4	Jazyková ustálenost	175
8.3.5	Další projevy explicitnosti a implicitnosti textu	183
8.4	Závěr	186
9	Pořadí informací v zadání slovní úlohy	189
9.1	Související výzkum	189
9.2	Popis použitých úloh	190
9.3	Výsledky	192
9.3.1	Výsledky podle charakteru zadání úlohy	192
9.3.2	Pořadí informací v zadání a známost kontextu	194
9.3.3	Pořadí informací v zadání a volba základní neznámé	206
9.4	Diskuse a závěr	207
10	Návodnosti	209
10.1	Související výzkum	209
10.2	Popis použitých úloh	211
10.2.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury)	211
10.2.2	Návodnost vazby (návodnost na rovině sémantické struktury)	212
10.3	Výsledky	214
10.3.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury)	214
10.3.2	Správná návodnost vazby: úlohy bez antisignálu	216
10.3.3	Správná návodnost vazby: úlohy s antisignálem	221
10.3.4	Správná návodnost vazby: bez antisignálu vs. s antisignálem	224
10.3.5	Shrnutí kvalitativní analýzy chyb u úloh s antisignálem	233
10.3.6	Falešná návodnost vazby	234
10.4	Diskuse a závěr	237
10.4.1	Návodnost dobrých triád (návodnost na rovině matematické struktury)	237
10.4.2	Návodnost vazby (návodnost na rovině sémantické struktury)	238
11	Operátor a přítomnost stavu	241
11.1	Související výzkum	241
11.2	Popis použitých úloh	243
11.3	Výsledky	245
11.4	Diskuse a závěr	257
12	Slovní úlohy s antisignálem	261
12.1	Související výzkum	261
12.2	Popis použitých úloh	264
12.3	Výsledky	267
12.3.1	Antisignál a operátorové úlohy	271
12.3.2	Antisignál a nadbytečný numerický údaj	274
12.3.3	Antisignál a návodnosti	278
12.4	Diskuse a závěr	282
13	Proporční a aditivní uvažování, úměrnosti	285
13.1	Související výzkum	286
13.1.1	Proporční versus aditivní situace	286
13.1.2	Úměrnosti	287
13.1.3	Typ poměru	288
13.2	Popis použitých úloh	289
13.2.1	Úlohy proporční versus aditivní	289
13.2.2	Úlohy typu úměrnosti	292
13.2.3	Způsob vyhodnocování dat	294

13.3	Výsledky	295
13.3.1	Rozdíly v obtížnosti mezi aditivní a proporční variantou	295
13.3.2	Vliv přítomnosti informace o typu úměrnosti v zadání úlohy	303
13.3.3	Záměny struktury úlohy	306
13.3.4	Vliv typu poměru	312
13.4	Diskuse a závěr	314
13.4.1	Aditivní a proporční uvažování	314
13.4.2	Úměrnosti	316
14	Shrnutí výsledků výzkumu	317
14.1	Vliv zkoumaných parametrů na obtížnost slovní úlohy	317
14.1.1	Zkušenostní kontext	317
14.1.2	Přítomnost nadbytečných informací (délka textu)	318
14.1.3	Verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy	319
14.1.4	Jazyková explicitnost zadání slovní úlohy	319
14.1.5	Pořadí informací v zadání slovní úlohy	320
14.1.6	Návodnosti	320
14.1.7	Operátor a přítomnost stavu	321
14.1.8	Antisignál	322
14.1.9	Proporční a aditivní uvažování a úměrnosti	322
14.1.10	Kombinace parametrů	323
14.2	Omezení výzkumu a jeho možné pokračování	324
15	Didaktické důsledky výzkumu	327
	Summary	331
	Literatura	333
	Jmenný rejstřík	349
	Rejstřík	353
	Seznam zkratk	357
	Přílohy	359
1	Příklad přiřazení úloh do testových sešitů (HT3)	359
2	Příklad testového sešitu pro 5. ročník z HT3	361
3	Příklad dotazníku pro žáky 5. ročníku	363
4	Zadání úloh použitých v testováních	369

Úvod

Slovní úlohy tvoří neopominutelnou součást matematiky už od starověku. Byly a jsou využívány jako názorná ukázka skutečnosti, že zvládnutí matematických operací, získávané ve výuce matematiky od raného školního věku, může být pomůckou pro porozumění okolní realitě, zejména však může sloužit jako nástroj pro řešení praktických životních situací a úkolů. Měly by mj. dokazovat, že znalost a zvládnutí matematiky je užitečnou a využitelnou schopností, přinejmenším v tom okruhu témat, která se probírají na základní, resp. nižší střední škole. Uvědomění si vztahu školních úloh k praktickému životu by mělo žáky motivovat ke snaze matematickým pojmům a operacím porozumět, jednoduše z toho důvodu, že je to pro jejich budoucí praktický život potřebné. (Stranou samozřejmě nezůstávají obecně formativní cíle výuky matematiky.) Právě důraz na aplikaci matematických poznatků, která má být prostřednictvím slovních úloh ukázána, by měl fungovat jako podpůrný (motivační) prostředek jejich porozumění. Dodejme, že v úlohách samých je tento aplikační důraz někdy posílen užitím názorných doprovodných vyobrazení, tj. neverbálního vyjádření.

Ohledy na praktickou využitelnost matematických znalostí se zejména v nižších třídách zvýrazňují využíváním témat žákům blízkých; také v užívaných učebnicích a příručkách je zřejmá snaha žáky pro řešení slovních úloh zaujmout. Nicméně slovní úlohy nejsou mezi žáky příliš populární, a to dlouhodobě (Rakušanová, 1957; Novotná, 2000).¹ Jedním z hlavních důvodů jsou kognitivní nároky, které slovní úloha na žáky klade, totiž nutnost zpracovat významy zadané v jednom kódovacím systému (verbálně popsat situaci a činnosti prostředky přirozeného jazyka, spoléhat se při tom na mimojazykovou zkušenost a na intuitivní znalost vztahů mezi pojmovými obsahy lexikálních jednotek) a následně jej převést do systému jiného (vytvořit matematický model reprezentovaný matematickými pojmy/symboly a nadále operovat jen s ním; číselný výsledek je dále nutné převést do slovního vyjádření). Pro řešení slovní úlohy navíc zpravidla neexistuje předem daný algoritmus řešení (s výjimkou úloh, které lze zařadit do určitého typu, např. na přímou úměrnost či na pohyb).

Od prvotních předpokladů, že obtížnost slovní úlohy je dána její matematickou strukturou, se zhruba od 70. let 20. století výzkumná pozornost posunula i do oblastí dalších, často i nematematických charakteristik slovní úlohy. Proto bylo cílem výzkumu, jehož výsledky prezentuje tato kniha, přinést další vhled právě do problematiky různých aspektů participujících na výstavbě slovní úlohy. Zajímalo nás, které prvky a jakým způsobem se podílejí na míře obtížnosti slovní úlohy. Konkrétně jsme chtěli zjistit, jak její obtížnost, a tím i úspěšnost žákova řešení ovlivňují některé z jazykových, matematických či kontextových charakteristik úlohy, které v knize nazýváme parametry. K tomu účelu jsme vytvořili úlohy, každou v několika variantách, které se lišily jedním či dvěma parametry. Ty jsme zadávali výkonnostně vyrovnaným skupinám žáků 3. až 9. ročníku základní školy.

Rámcově lze náš výzkum rozdělit do šesti vln testování, v nichž žáci řešili slovní úlohy. Po zadání vstupních testů z matematiky a českého jazyka byly na čtyřech školách realizovány celkem čtyři vlny testování a na dvou dalších školách celkem dvě. Tím jsme od cca 3 300 žáků získali téměř 11 000 vyplněných testových sešitů, každý po čtyřech až šesti

¹U našeho výzkumného vzorku však situace tak jednoznačná není (viz oddíl 4.1).

slovních úlohách, které bylo třeba vyhodnotit z hlediska úspěšnosti řešení i přítomnosti sledovaných jevů.

Pro získání představy o náplni výzkumu zde uvedeme přehled zkoumaných parametrů:²

- *Zkušební kontext* (obeznámenost žáků s kontextem úlohy, kap. 5)
- *Nadbytečné informace* v zadání úlohy (včetně přítomnosti nadbytečného numerického údaje, kap. 6)
- *Verbální a neverbální složka zadání* slovní úlohy (např. vliv přítomnosti různých druhů obrázků, kap. 7)
- *Jazyková explicitnost* zadání slovní úlohy (např. přítomnost modálního výrazu, jazyková ustálenost, kap. 8)
- *Pořadí informací* v zadání slovní úlohy (kap. 9)
- *Návodnosti* (návodnost čísel a návodnost vazby mezi objekty pojmenovanými v úloze, kap. 10)
- *Operátor a přítomnost stavu* (kap. 11)
- *Antisignál* (tedy slovo/slova vedoucí k opačné operaci, než vyžaduje správné řešení) (kap. 12)
- *Proporční a aditivní uvažování a úměrnosti* (kap. 13)

Z některých z těchto parametrů vyjímáme ještě dílčí parametry (např. parametr *úměrnosti* zahrnuje i parametr *typ poměru*).

Výrazným rysem našeho výzkumu je *multioborovost týmu*. Na výzkumu se podíleli odborníci z oblasti didaktiky matematiky, lingvistiky, psychologie a pedagogiky. To nám umožnilo zkoumat slovní úlohy z rozličných hledisek a v knize je postupně představíme.

Rámec výzkumu představuje první kapitola, která se zabývá *teoretickými východiskami*. Uvádíme, k jakému vymezení slovní úlohy se přikláníme, a stručně pojednáváme i o historii výzkumu slovních úloh.³ Důraz klademe na podrobné pojednání o jazykové složce slovních úloh a o jejím vztahu k matematické struktuře úloh, neboť v tomto aspektu pokládáme náš výzkum za inovativní a první svého druhu v České republice. Konečně se zabýváme též různými modely, které popisují průběh řešení slovních úloh, a některými strategiemi, pomocí kterých žáci slovní úlohy řeší. V obou případech vycházíme nejen z didakticko-matematické literatury, ale také z literatury psychologické, v níž jsou slovní úlohy často zkoumány, a z literatury lingvistické a pedagogické.

Naší snahou bylo mj. sjednotit terminologii v oblasti slovních úloh, která je v předmětných disciplínách do jisté míry roztržštěná. Jednotné vymezení pojmů nám umožnilo jejich účelné využití v celé knize pro popsání dosažených výsledků pro jednotlivé parametry.

Ve druhé kapitole podrobně popisujeme, jak jsme postupovali při *výběru a identifikaci parametrů*, jejichž vliv na obtížnost slovních úloh jsme posléze zkoumali. Výběr byl založen na systematické analýze konkrétních slovních úloh, s nimiž se čeští žáci setkávají v učebnicích a různých testech, doplněné studiem odborné literatury zkoumající vliv různých charakteristik úlohy na úspěšnost jejího řešení. Takto jsme dospěli k velkému počtu potenciálně důležitých parametrů, které jsme pro potřeby prezentace v knize sdružili do

²Názvy parametrů budeme pro přehlednost psát kurzívou.

³Naopak se nezabýváme historií samotných slovních úloh, byť se jedná o zajímavou problematiku.

větších skupin. Už z povahy věci, tedy z faktu, že slovní úloha se skládá z jazykové a matematické vrstvy, plyne, že tyto skupiny nejsou disjunktní, navzájem se překrývají. Ze seznamu identifikovaných parametrů jsme postupně vybírali ty, které jsme se z různých důvodů, které budou rozvedeny v dalším textu, rozhodli blíže prozkoumat. K tomu bylo nutné vytvořit varianty úloh, které se budou lišit právě jen v jednom zvoleném parametru, jenž mohl být v rámci úlohy různě kombinován s parametrem jiným. Tento nelehký úkol popisuje oddíl 2.3 věnovaný tvorbě testových úloh.

Třetí kapitola detailně představuje *metodologii* našeho výzkumu, která dává čtenáři možnost nahlédnout do procesu získávání výzkumného souboru žáků, dat i jejich interpretace. Do výzkumu jsme postupně zapojili šest pražských škol, a to od 3. do 9. ročníku. Protože se nesnažíme podávat zprávu o tom, jak čeští žáci řeší slovní úlohy, ale naším primárním cílem je zjistit, jak který parametr změní obtížnost slovní úlohy, nebylo třeba získat náhodný vzorek žáků z celé České republiky. Nicméně kladli jsme důraz na dostačnou heterogenitu souboru žáků, která je blíže popsána v oddíle 3.1.

Z oblasti metodologie zdůrazníme zejména způsob zpracování analýz získaných dat. Na rozdíl od klasické teorie testů, která pracuje s průměrnou úspěšností skupiny žáků, my jsme pracovali metodou Item Response Theory (dále jen IRT), která disponuje propracovanější metodikou zohledňující kognitivní úroveň každého žáka. Algoritmy výpočtů postavené na vhodné skladbě testových sešitů a jejich administraci nám umožnily propojit výsledky vstupních testů z matematiky a českého jazyka s výsledky testů z jednotlivých vln testování. Tím jsme lépe odstínilí případný efekt heterogenity skupin žáků řešících vždy určitou variantu úlohy, než by tomu bylo, pokud bychom pro rozdělení do skupin použili jen výsledky vstupních testů. Konečně IRT přináší podrobnější vhled do rozdílů v obtížnosti úloh než klasická teorie testů. Protože IRT je poměrně komplikovaná, věnovali jsme jejímu konkrétnímu použití v našem výzkumu v metodologické kapitole velkou pozornost (oddíl 3.8).

Důležitým rysem výzkumu zpracovaného v této knize je jeho smíšený design. Výzkum je sice primárně kvantitativní, ovšem jeho výsledky jsou interpretovány též kvalitativně, a to jednak pomocí analýzy písemných žákovských řešení (např. z hlediska použitých strategií řešení či přítomnosti chyb) a jednak s oporou o kvalitativní data získaná z polostrukturovaných rozhovorů s žáky. Rozhovory nám umožnily do jisté míry vysvětlit někdy překvapivé vlivy některých parametrů i jevy, které jsme sledovali v písemných řešeních žáků.

Díky podrobnému popisu procesu výzkumu ve třetí kapitole se budeme moci v dalších kapitolách vyjadřovat už stručněji s předpokladem, že čtenář si je metodologických charakteristik výzkumu vědom. Pro pochopení našich závěrů je nezbytný dobrý vhled do prezentace výsledků, kterou vysvětlujeme v oddíle 3.9. Výsledky budou totiž v dalších kapitolách prezentovány prostřednictvím tabulek a IRT grafů, které již nebudou znovu vysvětlovány.

Čtvrtá kapitola přináší zprávu o *výzkumném souboru žáků* z pohledu informací, které jsme o nich zjistili na základě dotazníků, a zejména z pohledu latentní schopnosti (kognitivní úrovně) žáků. Ta je podrobněji charakterizována prostřednictvím dalších žákovských proměnných, jako jsou pohlaví, prospěch a výsledky ze vstupních testů. K latentní schopnosti žáků jsou vztaheny všechny klíčové výsledky v naší knize, proto je důležité porozumět nejen její operacionalizaci, ale i jejímu vztahu k běžně užívaným manifestním proměnným.

Pátá až třináctá kapitola jsou věnovány *konkrétním parametrům slovních úloh*, které jsme zkoumali (viz výše). Tyto kapitoly mají vždy stejnou strukturu. V jejich úvodu

zdůvodňujeme výběr daného parametru, poskytujeme jeho širší kontext a vymezujeme pojmy, které jsou pro něj specifické. V prvním číslovaném oddíle kapitol jsou stručně shrnuty výsledky zkoumání daného parametru, a to zejména v zahraničním výzkumu⁴ (pokud existuje – např. některé jazykové rysy typické pro češtinu přirozeně zahraniční výzkumy neevidentují). V následujícím oddíle popisujeme, jak jsme vybírali úlohy pro daný parametr. Protože některé parametry zkoumáme mnoha úlohami a chceme se vyhnout dlouhým výčtům zadání, které by narušily tok textu, v příslušném oddíle uvádíme zpravidla jen příklady úloh, přičemž další jsou uvedeny u prezentace výsledků a na další odkazujeme do přílohy 4. V této příloze jsou uvedeny všechny úlohy zadané v testech, které jsme využili pro získání výsledků shrnutých v kapitolách 5 až 13. V samotných kapitolách prezentujeme⁵ především ty, u nichž se nějakým způsobem prokázaly rozdíly, nebo ty, u nichž jsme získali výsledky hodné pozornosti z jiného hlediska. Pro přehlednost uvádíme u zadání i výsledek úlohy.

Zde je na místě poznámka o zdrojích úloh, které jsme použili ve výzkumu. Určení autorství úloh v matematice je obecně komplikované. Některé jsou opakovaně používány autory učebnic nebo různých testů, jiné se objeví v internetových zdrojích bez udání autora. U některých úloh, které jsme v našem testování použili, můžeme s jistotou říct, odkud jsme některou z jejich variant přebrali, či na základě jaké úlohy jsme naše úlohy modelovali. V takovém případě to je uvedeno přímo u dané úlohy v příslušné kapitole a dále v příloze 4. Někde to však říct nedovedeme. Každá úloha vznikala za mnohých diskusí celého řešitelského týmu a doznala od svého prvního uvedení do diskuse mnoha změn. Pokud tedy není u úlohy uveden její zdroj, jedná se podle našeho nejlepšího svědomí o úlohu, kterou vytvořil či výrazně upravil řešitelský kolektiv. Nemůžeme však vyloučit, že se podobná úloha neobjevuje ještě někde jinde.

Třetí oddíl kapitol 5 až 13 podrobně prezentuje výsledky, k nimž jsme dospěli na základě analýz písemných řešení žáků a jejich zpracování pomocí IRT. Kvantitativní výsledky jsou doplněny výše uvedenými kvalitativními, přičemž oba typy výsledků od sebe neoddelujeme, nýbrž poznatky z rozhovorů s žáky a z písemných žákovských řešení⁶ uvádíme na místě, kde dobře osvětlí kvantitativní poznatky. Konečně poslední oddíl kapitol věnovaných parametrům obsahuje stručné shrnutí výsledků a jejich interpretaci ve světle existujících výzkumů a – podle povahy parametru – ve světle kurikulárních dokumentů či učitelské zkušenosti. Z našich výsledků zpravidla plynou i určité didaktické a výzkumné implikace.

V *závěru knihy* jsou stručně shrnuty výsledky týkající se vlivu jednotlivých parametrů, ale také poznatky jednotlivé parametry přesahující. Tyto poznatky se týkají jevů, které jsme identifikovali v písemných řešeních žáků u úloh napříč parametry či v rozhovorech vedených s žáky nad různými slovními úlohami. Podobně se věnujeme i omezením našeho výzkumu a jeho možnému pokračování. Získaná data jsou totiž natolik bohatá, že jsme z nich využili jen část. Navrhujeme další hlediska, z nichž by se data dala reinterpretovat a doplnit. Konečně shrnujeme a rozpracováváme didaktické důsledky našeho výzkumu formou doporučení pro výuku nejen slovních úloh v matematice, ale také porozumění textu v českém jazyce. Naš výzkum neověřoval didaktické přístupy k výuce slovních úloh,

⁴Pokud je nám známo, systematické zkoumání slovních úloh nebylo v České republice provedeno, existují spíše dílčí studie a zkušenosti sdílené učitelskou obcí.

⁵V úlohách, které řešili žáci, nebyly použity žádné grafické prostředky pro zvýraznění textu. Pokud se v kapitolách grafické prostředky v zadání úloh objevují (např. prostřednictvím kurziv), tak jen proto, abychom zvýraznili, v čem se zkoumaný parametr v zadání konkrétně projevuje.

⁶Žákovská řešení, která pocházejí z rozhovorů, jsou označena fiktivním křestním jménem žáka spolu s jeho ročníkem. Řešení převzatá z testování je označeno jen ročníkem.

a proto didaktické důsledky vyplývají z našich závěrů jen zprostředkovaně. Nicméně úvahy o možných didaktických přístupech, které by předešly identifikovaným problémům žáků či snížily jejich výskyt, považujeme za nedílnou součást takto široce zaměřeného výzkumu. U didaktických doporučení se proto vedle závěrů, které vyplývají z našich zjištění, opíráme také o existující výsledky výzkumů, které se námi doporučovanými praktikami zabývají.

Závěrem uvedeme několik terminologických poznámek. Termínem (*slovní*) *úloha* označujeme dvojici, trojici či čtveřici *variant*, které se liší jedním nebo dvěma parametry. Výraz *žák* chápeme jako pedagogickou kategorii a označujeme jím žákyně i žáky. Totéž platí v knize i pro termín *řešitel*, *učitel*, *tazatel*, *administrátor* či *opravovatel*, z nichž některé vedle pedagogické kategorie chápeme i jako generické (nepříznakové) maskulinum.⁷ Ve shodě s praxí užívanou v nejnovějších lingvistických publikacích volíme pro ženská zahraniční jména přechýlení s dodanými závorkami (např. „Jak píše Smith(ová)...“) (Karlík, Nekula, Pleskalová, eds., 2017). Snažíme se tak ponechat čtenáři možnost jednoznačné identifikace autorky prostřednictvím původní podoby příjmení a zároveň dodat informaci, že jde o ženu. Další pojmové a terminologické otázky jsou popsány v oddíle 1.1.2.

Knih je určena nejen výzkumníkům z oblasti didaktiky matematiky, ale také lingvistiky, pedagogiky a pedagogické psychologie. Věříme, že bude přínosná i pro doktorandy těchto oborů. Praktické důsledky našich zjištění mohou být inspirativní i pro učitele matematiky a českého jazyka a tvůrce testů (podrobněji viz v závěru knihy).

⁷Jelikož v našem výzkumném týmu zřetelně převažovaly ženy, nepokládáme užití generického maskulina za prostředek jazykové marginalizace žen, nýbrž nám slouží prostě jako prostředek jazykové ekonomie (viz komplikující požadavek rodové specifikace, např. *zadavatelé* a *zadavatelky*, či rodové neutralizace, která vede k syntaktické nezřetelnosti, srov. např. *zadávatel*, které by oba ztěžovaly plynulost čtení).

Teoretická východiska výzkumu

V této kapitole vymežíme pojem slovní úloha z jazykového, didakticko-matematického a psychologického hlediska a pojednáme o jejích lingvistických a strukturálních charakteristikách. Představíme model řešení slovní úlohy, o který se budeme opírat v dalších kapitolách knihy. V závěru kapitoly pojednáme o problematice možných příčin obtíží žáků při řešení slovních úloh zejména z jazykového hlediska. Obtíže vznikající na základě spíše matematických charakteristik⁸ úloh budou podrobně rozebrány v kap. 6, 9, 11, 12 a 13, proto se jich zde dotkneme jen okrajově.

1.1 Charakteristika slovní úlohy

Slovní úloha je nejobecněji vymezena autorskou intencí vytvořit verbálně zakódovaný, tj. slovně, nikoli matematickými symboly formulovaný úkol pro žáka. Tato intence vede produktora/autora úlohy k začlenění vytvářené slovní úlohy do širšího kontextu dalších, dříve vytvořených matematických úloh, které se zpravidla naplňují inovovaným obsahem. Z psychologického hlediska lze slovní úlohu spatřovat jako specifický typ problému, přičemž problém představuje situaci, která není řešitelná obvyklým způsobem, a její zvládnutí tedy vyžaduje nalezení nového řešení (Sternberg, 2003). V tomto smyslu slovní úlohy nejsou skutečnými problémy, protože jejich řešení obvykle není pro žáky zcela novým postupem. Společný jmenovatel s psychologickou definicí problémů ale je, že ve slovních úlohách musí dojít ke strukturaci prvků problémové situace, z které ihned nebo po restrukturaci vyplyne řešení.

V didaktice matematiky za slovní úlohu někteří autoři (např. Vyšín, 1962) považují jakýkoli slovně formulovaný matematický úkol, tedy např. „Urči takové číslo x , jehož trojnásobek zvětšený o jednu je 73.“ V takových slovních úlohách, i když vyžadují částečný převod popisu matematických operací (*trojnásobek* znamená 3krát, *zvětšený o jednu* znamená +1), je matematický model již předložen a není třeba ho sestavovat.

Většina autorů klade na slovní úlohu podmínku přítomnosti kontextu, např. Divíšek et al. (1989) či Kuřina (1989), podle kterého je ve slovních úlohách „popsána určitá reálná situace“ (s. 61), k níž jsou položeny otázky. Tohoto pojetí se v zásadě držíme i v našem výzkumu. Za slovní úlohu považujeme takovou úlohu, která obsahuje nějaký kontext (který může být reálný, pseudo-reálný či imaginární) a v níž jsou některé numerické údaje dány a jiné se hledají. Úloha obsahuje jeden nebo více úkolů (ve formě otázek nebo imperativních vět), které lze splnit za pomoci těchto numerických údajů, vztahů mezi nimi, které řešitel vyvodí ze zadání, a řešitelových znalostí a zkušeností, včetně mimoškolních. Úkolem žáka je situaci/příběh matematizovat, tj. (a) určit, které prvky budou vyjádřeny matematickými symboly, (b) zjistit, jakou, resp. jaké operace bude nutné s těmito prvky provádět a v jakém pořadí, aby bylo nalezeno řešení problému (adekvátní odpověď na položenou otázku). Řešení je následně třeba ověřit, protože mnohé slovní úlohy sugerují více možností matematizace, kdy tvůrce úlohy vědomě postupuje opačným směrem, než očekává od žáka, který bude úlohu řešit.

⁸Hranice mezi parametry není ostrá. Např. parametr *antisignál* či *pořadí informací* můžeme vidět jako matematický i jazykový.

1.1.1 Povaha matematických a jazykových pojmů

Matematické pojmy se od jazykových liší jednak neexistencí empirické reference (Materna, 2000: s. 90), jednak tím, že v jazyce neexistuje žádný soubor „základních pojmů“, zatímco v matematice ano. Pojmy jsou objektivní abstraktní (ideální) entity, které mohou být reprezentovány výrazy jazyka (ibid.: s. 17), ale s jedním pojmem může korespondovat více jazykových pojmenování/výrazů (a naopak), viz tradiční chápání arbitrárnosti jazykového znaku (např. Karlík, Nekula, Pleskalová, 2017: s. 2 122). Běžné (automatické) porozumění určitému jazykovému výrazu předpokládá identifikaci pojmu, který je tímto výrazem reprezentován, a také identifikaci potenciálního referentu, ke kterému se tento výraz může v konkrétní výpovědi v určitém kontextu vztahovat. U textů slovních úloh se však dá předpokládat, že je to právě primární zaměření řešitelů na empirickou referenci jazykových výrazů, které transfer od jazykového vyjádření k matematickým pojmům „zdržuje“. Jde o to, že referenční hodnota výrazů se vzhledem k zapojení do kontextu a vzhledem k mimojazykové zkušenosti a komunikační kompetenci vnímatelů může pro každého z nich proměňovat, i když jejich pojmový obsah zůstává stejný.⁹ Zkušenosti se vztahy objektů/entities mimojazykové skutečnosti (pragmatické inference), které jsou ve slovních úlohách pojmenovávány, mohou s modelováním (matematizací) potřebným k řešení úlohy korelovat, pak řešení usnadňují; jindy musí být adekvátní vztahy teprve nalezeny, resp. je třeba si je uvědomit.

Entity a vztahy mezi nimi verbálně popsané (pojmenované) v textu slovní úlohy jako reálné musejí být vyjádřeny výrazy matematickými (číslý nebo symboly) a vztahy mezi prvky popsané situace nebo činnosti musejí být převedeny na operační termíny. Např. „=“ vyjadřuje možnost nahradit jednu entitu druhou („Pepa má stejné množství kostek jako Jana.“), „+“ vyjadřuje např. sjednocování („Pepa a Jana mají dohromady určité množství kostek.“), „-“ např. odlučování („Pepa si vzal z krabice určitý počet kostek.“), „ x^2 “ vyjadřuje x -násobné opakování x („Jana si x krát vzala z krabice x kostek.“) apod. Ve výrazu např. $x^2 + y = z - u$ se každý ze symbolů a operačních termínů vztahuje k nějaké činnosti, která by mohla být reálná a jako reálná se popisuje v textu slovní úlohy. Při řešení slovních úloh je však úkolem dospět k matematickému, tedy abstraktnímu označení myšlenkových operací. K charakteristice myšlenkových operací srov. (Piaget, 1967: s. 33, 119–155; Piaget, 1966/1999: s. 41–42, 50–54). Z Piagetových výzkumů v mnohém vychází Reusser (1985, 1992). Ten upozorňuje, že matematické myšlení vývojově vychází z jednání, nejde však o jednostupňovou internalizaci/abstrakci, ale o postupné myšlenkové redukování „akce“ až na její strukturní jádro:

[...] na učení se základům matematiky můžeme pohlížet jako na proces, při němž se učíme soustředit na kvantitativní a numerické aspekty jednání a situací. Proto vývoj základních matematických operací jde ruku v ruce, i když ne zcela paralelně, se schopností dítěte chápat a vykonávat každodenní činnosti a rozumět přirozenému jazyku a používat ho. (Reusser, 1985: s. 4, překlad autoři)

Důležitá je zejména schopnost abstraktně uchopit vztah mezi *akcí* a (matematickou) *operací*. Hlavním zdrojem potíží při řešení slovních úloh je právě nutný proces abstrakce, přechod od jazykových pojmenování a vazby pojmových obsahů těchto pojmenování k realitě (nutně související s vlastní zkušeností žáka), k nutnosti substituovat je jednotkami

⁹Např. slovo *pes* má stále stejný pojmový obsah, ale při jeho užití si každý mluvčí primárně vybaví jiné zvíře, se kterým má zkušenost.

abstraktními a následně operovat s nimi; zdroje potíží však mohou být v různých situačních kontextech i jiné.

1.1.2 Terminologie

V mezioborovém výzkumu z oblasti lingvistiky, didaktiky matematiky a psychologie bylo nutné se vyrovnat s některými pojmovými i terminologickými odlišnostmi. V literatuře zabývající se slovními úlohami se např. běžně počítá s tím, že součástí zadání úlohy je jednak předmětná oblast, a to objekty, o nichž se v úloze mluví, jednak vztahy, které objekty navzájem spojují; tyto dvě složky se označují jako *podmínky úlohy*. Martin(ová) a Bassok(ová) (2005) hovoří o *sémantických vztazích* mezi objekty (vztahy mohou být funkční – tulipány a vázy; nebo kategoriální – tulipány a sedmikrásky). Jde však o to, že součástí slovní úlohy, resp. oněmi *sémantickými vztahy*, s nimiž se ve slovní úloze pracuje, nejsou objekty samé, nýbrž jejich pojmenování, přesněji řečeno pojmové obsahy (mentální reprezentace) těchto pojmenování. Empirické, tj. žákům z mimojazykové zkušenosti známé vztahy mezi pojmenovanými objekty se do chápání vztahů mezi pojmovými obsahy buď přenášejí, nebo se jako součást řešení teprve hledají. Tento rozdíl se objevuje zejména u úloh s tzv. známým kontextem, přesněji řečeno se známým zkušenostním kontextem; proti nim stojí nutnost operovat v některých úlohách s pojmy, které pro žáky empirické, tj. zkušenostní analogie nemají.

Při posuzování faktorů ovlivňujících úspěšnost řešení slovních úloh je zřetelně odlišné chápání termínu *operátor*. V lingvistickém smyslu se za operátor považuje výraz, který má sémantiku funkce, např. operátor negace nebo modální sloveso operují na propozici (operátor je uplatněn na různé složky obsahu věty, nebo jí může být předřazen jako celku); srov. heslo Operátor v (Karlík, Nekula, Pleskalová, 2017). V matematickém smyslu je číslo v roli operátoru tehdy, když reprezentuje vztah dvou stavů (viz oddíl 2.2.3). Termín *operace* byl zmíněn výše – podle Piageta (1966/1999 aj.) jde u operačního myšlení o gradované stadium v postupném vývoji inteligence, které začíná s nabýváním jazyka a dovršuje se v adolescenci.

Dalším termínem, který je nutno komentovat, je *kontext*. Lingvisticky se rozlišuje *bezprostřední kontext slovní* (např. mezivětné odkazování deiktickými slovy), *kontext situační* (určuje v diskursu referenční hodnotu indexů *já, ty, tady, teď* a výrazů od nich odvozených) a *kontext zkušenostní* (zásoba znalostí a zkušeností, o nichž produktor předpokládá, že ji s ním příjemce sdílí). V pracích zabývajících se slovními úlohami se jako *více* či *méně známý kontext* označuje zejména poslední zmíněná varianta; z úvah o „obtížnosti“ jazykového vyjádření úloh však plyne, že jistou roli mohou mít i faktory spojené se situačním kontextem.

Poznámku zasluhuje i termín *modalita*. O *modalitě* a *modálních výrazech* v lingvistickém smyslu, tedy jako o modifikátorech významu větného predikátu, se pojednává v oddíle 2.2.2; o úlohách s modálními výrazy v kap. 8. *Epistémická modalita* (postoj mluvčího vyjadřující jeho znalosti nebo mínění o pravdivosti informace) je zmíněna v souvislosti s kognitivně-postojovými predikáty níže.

1.2 Model procesu řešení slovních úloh

Slovními úlohami byla jak v českých (např. četné práce Novotné a Hejného), tak v zahraničních publikacích věnována rozsáhlá pozornost. V 80. letech 20. stol. se objevuje modelační přístup ke zkoumání role jazykové stránky slovní úlohy (Reusser, 1985). Jde o vliv prací psychologa Kintsche, který spolu s teoretikem diskursivní analýzy Van Dijkem (1983) vypracoval a později jinde experimentálně využil (Kintsch, Greeno, 1985) analýzu a popis strategií porozumění diskursu (zde míněno textové jednotky). Van Dijk

při identifikaci těchto strategií využil svůj dřívější (1980) koncept tzv. makrostruktur. Jde o složky textu, zobecněné sémantické jednotky (makropropozice), ukazující, jak je v textovém celku uspořádán obsah, jak je informace nesená textem zorganizována. Intuitivní vytváření makrostruktur při mentálním zpracování (chápání) textu není jen vytváření obsahového kondenzátu, ale na výsledku se podílejí i jisté myšlenkové operace (propoziční strategie). Ty ukazují, jak vnímatel jednotlivé složky textu (propozice, tj. celky organizované kolem individuálních predikátů) a jejich vzájemné vztahy (resp. vztahy těchto složek k mimojazykové skutečnosti a k vnímatelovým existujícím konceptuálním strukturám) chápe. Jde např. o generalizace, integrace, redukce (vynechávání irelevantních prvků), ale i nezměněné přejímání celých propozic (pokud jsou pro organizaci obsahu zásadní), uspořádání v časové následnosti. Makrostruktura, která je výsledkem takových strategických kroků (pochopení textové jednotky), ukazuje, jak vnímatel pochopil obsahové jádro textu. Analogicky lze při zpracování obsahové analýzy textu docházet k jednotkám menším, k mikropropozicím, které jsou jednotlivými komponenty celkovému porozumění textu; zejména jde o pojmové obsahy klíčových slov.

Při mentálním zpracování textu jde tedy zároveň o jeho interpretaci související s pracovní pamětí¹⁰, vnímatel si průběžně vytváří svůj vlastní (procesuální) mentální model obsahu, kombinuje receptivní a produktivní aktivitu. Kintsch i již zmíněný Reusser se v 80. letech podíleli na experimentech (srov. Cummins et al., 1988), při nichž se zkoumal vztah mezi úspěšností řešení slovně formulované úlohy a jejím pochopením na straně žáka. Pochopení bylo testováno jednak na schopnosti žáka úlohu „vlastními slovy“ reprodukovat, jednak na tom, zda byl žák schopen utvořit k (nedokončené) úloze finální otázku, tj. ukázat, že pochopil, na co je úloha zaměřena. To, co testovaní žáci předkládali, byly jimi zkonstruované mentální modely; omyly při řešení (chybně zvolené aritmetické strategie) totiž vždy souvisely s chybným pochopením předkládané úlohy, jež zpravidla plynulo z abstraktních vyjádření v textu úlohy nebo z potenciálních dvojnázností (srov. parametr *jazyková explicitnost* v kap. 8).

Ve svých vlastních výzkumech rozděluje Reusser (1985, 1989, 1992) proces řešení slovní úlohy do několika kroků. Jako první krok předpokládá zpracování textového vstupu do (sémantického) mikro- nebo makrostrukturního modelu (tzv. *textové báze*). Druhým krokem je vytvoření tzv. *situčního modelu*, který má ukázat, co je cílem úlohy. Zahrnuje vytvoření modelu situace (složené z epizod včetně časových vztahů mezi nimi) koordinovaného s textovouází; tento model má objasňovat, k čemu má textem popsaná situace nebo jednání konatelů dospět: jde o stanovení problému, tj. identifikaci informační mezery, na kterou má být zaměřena relevantní otázka.¹¹ Třetím krokem je zkonstruování *matematického modelu* vhodného pro aplikaci kalkulačních strategií. Vytvoření tohoto modelu lze popsat jako výsledek procesu abstrahování/redukování situčního modelu; matematický model je relační struktura obsahující pouze jádrové momenty situace a kvantitativní vztahy mezi nimi. Akce (jednání a vztahy entit) jsou interpretovány jako operace, počty objektů jsou nahlíženy jako funkčně definované prvky nebo jejich sady, začleněné do matematické operační struktury. Tento matematický model může mít dvě úrovně: nenumerický,

¹⁰Pracovní paměť chápeme spolu s Cowanem jako systém umožňující udržení informace v aktuální paměti a její aktivní vybavení (Cowan, 2010).

¹¹Při výuce jsou žáci vedeni k zaznamenání klíčových aspektů situčního modelu prostřednictvím vhodného znakového systému (referenčního jazyka). Tento záznam budeme v naší monografii nazývat termínem *legenda* (učitelé hovoří též o *zápise*). Polya (1945/1988) uvádí tři typy kódování informací ze zadání: pomocí rovnic, grafické a diagramové. Podrobněji se kódování údajů ze zadání a typům legend věnuje např. Novotná, která představuje čtyři základní typy legend: slovní, tabulkové, obrázkové a algebraické (2000: s. 27–29).

ale již abstraktní (schematický) matematický model problému, nebo formální numerický (nebo algebraický) matematický model.¹² K vytváření takových modelů významně přispívá postupně rozšiřovaná dětská zkušenost s matematickými texty a intencionálnost, tedy zaměření produkční aktivity specificky na matematizaci (na aritmetické strategie; Reusser, 1995: s. 58, 81–82). V matematickém modelu již může být otázka na problém jednoznačná (např. *kolík/o kolík/kolíkrát*, *ibid.*: s. 149–151, 203, obr. 3–6). I když je matematický model (rovnice) atemporální (bez časové dimenze), v něm obsažené operace (abstraktní jednání) využívají časoprostorové údaje v situačním modelu jako názornou oporu (*ibid.*: s. 201–203).

Výsledkem Reusserových analýz je didaktický model řešení slovních úloh sestávající z pěti navazujících komplexních kroků (*ibid.*: s. 321), přičemž 1. krok, porozumění textu, obsahuje (a) překlad neznámých nebo obtížných slov, (b) zjednodušení gramaticky obtížných vět, (c) převyprávění (*renarration*) úlohy vlastními slovy. Dalšími, opět komplexními kroky jsou 2. porozumění situaci a problému v ní ve věcných souvislostech, generování otázek; 3. matematizace situační představy; 4. provedení výpočtu (numerické řešení); 5. vytvoření odpovědi – interpretace numerického výsledku na podkladu věcné představy problému.¹³ Závěr studie ovšem konstatuje, že experimentální ověření modelu je věcí dalšího výzkumu.¹⁴

Řešení praktických i akademických problémů, včetně matematických slovních úloh, lze nahlížet i z kognitivního hlediska a rozdělit ho do následujících sedmi kroků (Reed, 2000; Sternberg, 2003): (a) identifikace problému, (b) definování problému, (c) uspořádání informací, (d) zhodnocení zdrojů pro řešení, (e) volba strategie, (f) monitorování procesu řešení, (g) zhodnocení výsledku řešení.

Pro úplnost dodejme, že řada prací o fázování řešení slovních úloh vychází z klasického modelu řešení matematické úlohy podle Polyi (1945/1988: s. 6–15):

- a) pochopení problému (co se hledá? co známe? jaké jsou podmínky? jsou známy všechny podmínky? apod.)
- b) vytvoření plánu (už jsi podobnou úlohu řešil? znáš podobnou úlohu? znáš nějakou metodu, která by se dala použít? dovedeš řešit jednodušší úlohy? apod.)
- c) realizace plánu (realizuj plán a kontroluj každý krok, je každý krok pravdivý? apod.)
- d) pohled zpět (zkontroluj nalezený výsledek, můžeš k němu dospět i jinak? můžeš použít daný postup i u jiné úlohy? apod.).

Uvedené periodizace řešení (matematického) problému rozlišují obdobné fáze. Psychologický a didaktický přístup je tedy ve shodě.

1.3 Některé příčiny žákovských obtíží

Příčiny obtíží žáků¹⁵ při řešení slovních úloh můžeme spatřovat přímo v jazykové podobě slovní úlohy, která může být obtížně srozumitelná nebo nejednoznačná. Může jít o takové

¹²Srov. Reusser, 1985: s. 13; 1995: s. 91–92, s. 255.

¹³V tomto smyslu se v české literatuře hovoří o tzv. sémantické zkoušce (oproti zkoušce správnosti numerických výpočtů).

¹⁴Zejména zkoumání bodu (c) v prvním kroku je nutno si představit jako mimořádně časově náročné, např. výše citovaná studie Cummins(ové) et al. (1988) pracovala pouze s 26 žáky.

¹⁵Další odkazy na výzkumy v této oblasti jsou součástí kapitol 5 až 13, kde jsou využity pro možné vysvětlení obtíží žáků, které jsme identifikovali v našem výzkumu. Zde je nepopisujeme, abychom zamezili zbytečnému opakování.

formulace, které jsou např. stylově nebo lexikálně příznakové – jsou výrazně kondenzované, obsahují terminologii, s níž žáci nejsou obeznámeni, historismy nebo archaismy, tj. formulace vyžadující vyšší úroveň gramatické kompetence a širší slovní zásobu. Může však také jít ze strany žáka o nerozvinutou schopnost, popř. neochotu identifikovat v textech úloh právě ty údaje/prvky obsahu, které mají (mohou) být do matematického modelu použity. Podstatným, působícím faktorem spojeným se slovní úlohou tedy může být nutnost kognitivního zpracování (interpretace) textu žádoucím způsobem. Z hlediska porozumění slovním úlohám jakožto specifickým textovým/komunikačním útvarům a z hlediska nacházení jejich adekvátní interpretace (přístup k řešení úlohy je výsledkem její interpretace) jde o nutnost uplatnění dvojí kompetence, totiž *kompetence komunikační* (gramatické kompetence a obeznámenosti se slovní zásobou, jež jsou nutné k interpretaci jazykového kódování) a *kompetence matematické*.¹⁶ Úroveň komunikační kompetence v mateřském jazyce může limitovat přístup k využití kompetence matematické. Žádoucí zacházení se slovní úlohou lze tudíž označit za metakomunikační dovednost – schopnost orientace v textech slovní úlohy se žáci postupně učí na základě pochopení jejich jazykového ztvárnění (opakovaně uplatňují postupně získávané interpretační dovednosti) a v návaznosti na to se učí přiřazovat jazykově pojmenovaným obsahovým jednotkám matematické vyjádření.

Jak již bylo uvedeno, při řešení slovní úlohy dochází obecně nejprve k tvorbě situačního modelu, na jehož základě pak žáci dospívají k matematickému modelu řešení. Takové metody řešení jsou označovány *meaningful* (Hegarty, Mayer, Monk, 1995). Hejný (1995) v tomto smyslu mluví o *zmocňování se*¹⁷ *úlohy s porozuměním*, Vinner (1997) o *analytickém přístupu*.

Pokud však situační model vytvořen není (podle Hejného, *ibid.*, došlo k *protetickému zmocňování se*) a žák přechází přímo k matematickému modelu, nazveme takovou strategii *povrchovou*. Povrchovou strategii použije např. žák, který úlohu řeší na základě podobnosti se známou (prototypickou úlohou) (Martin, Bassok, 2005; Fisher, Borchert, Bassok, 2011) nebo ze zadání slovní úlohy vybere čísla a snaží se na základě klíčových slov (signálů) usoudit na povahu matematického modelu. Nedochozí tedy k vytvoření situačního modelu vycházejícího z významu celého textu slovní úlohy, ale strategie je postavená na malých fragmentech textu (čísla a jednotlivá slova, která přímo na tato čísla odkazují). Tato strategie se v zahraniční literatuře nazývá *direct translation strategy* (např. Nesher, Teubal, 1975; Hegarty, Mayer, Monk, 1995) či u nás řešení založené na *signálních slovech* (Hejný, 2014: s. 117) či *strategie založená na protetickém uchopovacím procesu* (Hejný, 1995).¹⁸ Podobnou situaci popisuje Vinner (1997) termínem *pseudo-analytické uvažování*. Pseudo-analytické uvažování spočívá v tom, že žák na základě určitých podobností, analogií či signálů vybere z mnohých jemu dostupných algoritmů jeden a ten použije. To ho stojí daleko menší kognitivní úsilí než přístup druhý, který, jak bylo uvedeno výše, Vinner

¹⁶U komunikační kompetence jde o kompetentní užívání a interpretaci kompetentně utvořených vět (srov. Lyons, 1977: s. 573–592). Vedle komunikační a matematické kompetence hrají ještě roli kompetence praktické, které představují nakládání s problémovými situacemi z oblastí reálného života, k nimž se vztahují matematické úlohy. Pokud se například slovní úloha zabývá rozdělováním dáreků na dětské oslavě, roste pravděpodobnost správného řešení u žáků, kteří se takových oslav zúčastnili a rozuměli explicitním či implicitním pravidlům, kterými se řídilo rozdělování dáreků. V tomto smyslu však praktické kompetence mohou být užitečné pouze v případech, kdy slovní úlohy jsou v souladu se zákovskou zkušeností. Didaktické pojetí komunikační kompetence je širší a většinou označuje široký komplex receptivních i produktivních řečových dovedností (zjednodušeně se někdy nazývají čtení, psaní, mluvení a naslouchání).

¹⁷Hejný vymezuje toto zmocňování se jako proces, který probíhá ve vědomí řešitele při vnímání textu úlohy. V terminologii, kterou používáme v knize, se jedná o tvorbu situačního modelu.

¹⁸V důsledku uplatnění této strategie mohou pak žáci mít problémy při řešení úloh s tzv. antisignálem, viz kap. 12.

nazývá analytický. V něm se žák zaměřuje na identifikaci typu a struktury daného matematického problému a podle toho se snaží najít odpovídající strategii řešení (v případě slovních úloh bychom řekli, že se snaží o situační model a jemu odpovídající matematický model).

Tendenci zejména mladších žáků k používání výše zmíněných povrchových strategií (ať je již nazveme jakkoli) popisují v rozsáhlé metaanalýze Nunes(ová) et al. (2016) jako jeden z konzistentních výsledků výzkumů v oblasti řešení slovních úloh. Byla však identifikována i u budoucích učitelů 1. stupně (Hegarty, Mayer, Monk, 1995).

Přítomnost klíčových slov či vodítek v zadání slovních úloh spolu s didaktickým přístupem, který žáka vede k jejich vyhledání ve slovní úloze, pak může být jednou z příčin povrchových strategií řešení úloh. Ovšem na druhé straně si je třeba uvědomit, že tvorba situačního modelu je relativně obtížná a spoléhání na podobné povrchové strategie (např. vyhledávání klíčových slov) může být v určitém slova smyslu vnímáno jako snaha předejít kognitivnímu přetížení (Havlíčková, Hříbková, Páchová, 2015: s. 128–131). Tato teze souvisí se skutečností, že aby bylo možné vyřešit slovní úlohu, je k tomu potřeba rovněž dostatek mentálního prostoru. Ten je z kognitivního hlediska zajišťován pracovní pamětí. Řešení slovní úlohy však na pracovní paměť přináší velké nároky,¹⁹ a tak snadno může dojít ke kognitivnímu přetížení (např. Sweller, 2010). Při použití povrchové strategie řešení je tak vlastně kapacita pracovní paměti šetřena.

Příčiny obtíží žáků mohou být i didaktické. Např. v průběhu své školní výuky si žáci mohou vytvořit určitá přesvědčení a implicitní očekávání, která jim zabraňují v úspěšném řešení slovních úloh (viz např. Greer, Verschaffel, De Corte, 2003; Thevenot, 2017): každá slovní úloha má řešení, a to je jediné a jednoznačné, výsledek se získá pomocí jedné nebo více matematických operací s čísly ze zadání, slovní úloha je řešitelná známými matematickými procedurami a musí se pro ni využít všechna zadaná čísla, v zadání jsou všechny nutné údaje a žádný navíc, při řešení je nutno ignorovat případné nekonzistence s intuicí či každodenní zkušeností²⁰, operaci napoví klíčová slova. V této souvislosti hovoří De Corte a Verschaffel (1985) o tzv. *word problem game*. Greer, Verschaffel a De Corte (2003) dokládají, že „nesmyslné“ odpovědi žáků na otázky slovních úloh nemusí být způsobeny tím, že by si tuto nesmyslnost neuvědomovali, ale právě výše uvedenými přesvědčeními.

Mechanismus vzniku podobných přesvědčení a implicitních očekávání postihuje pojem *didaktický kontrakt* vypracovaný v rámci teorie didaktických situací (Brousseau, 1997; Brousseau, Sarrazy, 2002; Brousseau, 2012). Stručně řečeno, mezi žákem, jeho spolužáky, prostředím, učitelem, učivem i vzdělávacím systémem existují skrytá pravidla, která slouží oběma stranám k naplnění nepsaného poslání: Žáci se chtějí něco naučit a učitel jim to umožní. Didaktický kontrakt upravuje vztahy mezi učitelem a žáky týkající se úkolů, které je třeba provádět, aby se žáci něco naučili. Určuje jejich role a vzájemná očekávání. Jinými

¹⁹Tvorba modelu (nebo spíše schématu) není z našeho pohledu jednorázovým aktem, ale spíše se jedná o neustálé kolísání mezi paralelní rovinou číselných údajů a sémantiky textu. Pokud počet vztahů a elementů obsažených v úloze přesahuje kapacitu pracovní paměti, vynořující se schéma bude zredukováno (svinuto) z toho důvodu, aby se následně při řešení úlohy znovu rozvinulo. Pokud se jedná o úlohu prototypickou či takovou, se kterou má řešitel mnoho zkušeností, nemusí se tato redukce při řešení vůbec projevit (chybějící prvek se „automaticky“ doplní). Pokud je však úloha netypická, snadněji se stane, že se původní obsah úlohy ztratí a při řešení bude nahrazen něčím jiným (něčím, co odpovídá spíše prototypu dané úlohy nežli úloze samé) (Havlíčková, Hříbková, Páchová, 2015).

²⁰Dnes již klasickým příkladem je úloha „Na lodi je 26 ovcí a 10 koz. Jak starý je kapitán?“, která byla v různých obměnách mnohokrát použita v didakticko-matematickém výzkumu a u níž bylo opakovaně zjištěno, že žáci získávají odpověď pomocí operace se zadanými čísly (viz např. Radatz, 1983).

slovy můžeme říci, že didaktický kontrakt obsahuje množinu chování učitele (specifickou k vyučované znalosti), kterou očekávají žáci, a množinu chování žáků, kterou očekává učitel. Ovšem termín kontrakt je zde použit jako metafora, ve skutečnosti neměl nikdy „status smlouvy“, a to ani explicitně, ani implicitně. Neexistují ani ustanovení týkající se porušení kontraktu a sankcí. O didaktickém kontraktu vytvořeném mezi učitelem a žáky se dozvíme, teprve když je porušen.

V našem výzkumu jsme se didaktickým příčinám obtíží žáků a otázkám didaktického kontraktu explicitně nevěnovali, nicméně se k nim občas uchylujeme při interpretaci výsledků a zejména příčin identifikovaných chyb.

Ve výzkumu jsme upřeli pozornost na samotné charakteristiky slovních úloh, které mohou různým způsobem ovlivňovat obtížnost těchto úloh, a tím mít rovněž vliv na žákovská řešení. Ve shodě s vymezením termínu *task variable* (Goldin, McClintock, eds., 1979) budeme pro takovou charakteristiku slovní úlohy, která může nabývat různých hodnot, používat termín *parametr*. Parametr může být kvantifikovatelný (např. počet nadbytečných numerických údajů v úloze), ale také klasifikační (např. úloha s antisignálem a bez něj).

1.4 Zkoumání jazykové stránky slovních úloh

Z dostupné literatury je zřejmé, že jazyková stránka slovních úloh byla zkoumána zejména v zahraničí, a to nikoli lingvisty, nýbrž didaktiky matematiky a pedagogy (zejména v souvislosti s tzv. čtenářskou gramotností). Zaměřovali se zpravidla na jeden faktor, nejčastěji na nižší úroveň jazykové kompetence u žáků, pro něž byl jazyk úloh druhým jazykem. Nejčastějším přístupem byla snaha text slovní úlohy zjednodušovat, „zpřístupňovat“ této nižší kompetenci (viz Abedi, Lord, 2001; Plath, Leiss, 2018; druhá studie metodologicky navazuje na první).²¹ Výsledky pak byly do značné míry prediktabilní. Srovnávána byla úspěšnost řešení při užití původních textů slovních úloh a úspěšnost při řešení textů upravených (zjednodušených). Úpravy spočívaly v tom, že původní texty byly převedeny na sledy jednoduchých vět se slovesy v indikativu, tj. byla rozparcelována souvětí a odstraněny tvary jako konjunktiv nebo pasivum (impersonální konstrukce), resp. tvary relativních časů vyjadřované složitějšími konstrukcemi, rovněž výrazy potenciálně dvojznačné a idiomatická vyjádření (např. zavedené matematické formulace). Srovnávaly se slovní úlohy, v nichž bylo upraveno vždy více rysů najednou, tj. nesledoval se vliv jednotlivých rysů individuálně. U americké studie byly výsledky komplikovány tím, že žáci ve stejném ročníku (ve výzkumu v 7., tj. na nižší střední škole) měli možnost volit si různé stupně obtížnosti matematického učiva; zlepšení úspěšnosti se při práci s upravenými texty projevilo více u žáků, kteří řešili úlohy s nižším stupněm obtížnosti, a u žáků s nižší úrovní znalosti angličtiny. V německé studii se rovněž zohledňovala úroveň znalosti němčiny. Ukázalo se, že obecně lepší výsledky jak v původních, tak ve zjednodušených úlohách měli žáci lépe ovládající jazyk, s příznivějším socioekonomickým zázemím (přičemž autoři konstatují, že lepší ekonomické zázemí rodiny přímo korelovalo s lepší znalostí jazyka); zároveň byli úspěšnější chlapci než dívky. Vyšší úspěšnost v řešení byla (očekávatelně) zaznamenána u modifikovaných (zjednodušených) textů slovních úloh.

V další studii (Bergqvist, Theens, Österholm, 2018) autoři předpokládají, že vyšší obtížnost textu a z ní vyplývající nižší úspěšnost řešení slovních úloh spočívá v nutnosti číst delší slova, delší věty a delší, resp. informačně hustší text, přičemž porovnávají tytéž

²¹Ačkoli studie Plath(ové) a Leisse (2018) výslovně odkazuje na Reusserův krokový model, ve výzkumu samém nebyl uplatněn; využito bylo pouze explicitní zjednodušení textů slovních úloh – náhrada terminologie, resp. výrazů označitelých za stylové příznakové (odborné), a gramatická simplifikace.

úlohy (83 úloh PISA²² 2012 pro žáky ve věku 15 let) v angličtině, němčině a švédštině. Vycházejí z předpokladu, že všechny tři jazykové verze jsou z hlediska kvality stejně hodnotné. Zaměřují se na posuzování délky slov – za dlouhé slovo se považuje takové, které má více než šest písmen nebo více než dvě slabiky, avšak neberou se v úvahu zkratky (cm, km), čísla psaná číslicí a vzorce (CO₂). U délky vět se počítá průměrný počet slov ve větě v dané úloze; zkratky, číslice atd. se rovněž započítávají. Dále se posuzuje délka textu, tj. slovní úlohy samé, která se chápe jako celkový počet slov v úloze, a hustota textu, kde se zkoumá počet jmen vs. počet sloves. „Jméno“ („noun“) ovšem není definováno (patrně pouze substantivum), k dalším slovním druhům se nepřihlíží. Tento přístup je podle našeho názoru značně mechanický. Autoři studie zjistili, že nároky na čtenářskou gramotnost, tedy porozumění jazykové stránce slovních úloh, souvisí s vyšším počtem dlouhých slov a s vyšší informační hustotou textu, avšak v každém jazyce jinak. Např. v němčině zvýšení informační hustoty textu zvyšovalo nároky na porozumění, zatímco délka slov a nároky na porozumění byly v opačném poměru, tj. delší slova náročnost snižovala. V angličtině a švédštině se rozdíl v těchto dvou rysech ukázaly jako statisticky nevýznamné (ibid.: s. 50). Ve vztahu jazykového ztvárnění úloh a jejich obtížnosti/řešitelnosti z hlediska matematiky autoři studie vyslovili požadavek nutnosti dalšího zkoumání.

V uvedené studii se dále ukázalo, že vliv uvedených předběžně stanovených charakteristik je nutno vidět především v rámci jednoho jazyka, mezijazykové srovnání přináší výsledky z lingvistického hlediska nekompatibilní. Autoři (ibid.) si sice uvědomují, že i když zkoumali geneticky příbuzné jazyky, je zde, např. pokud jde o délku slov, inherentní rozdíl mezi angličtinou na jedné straně a němčinou a švédštinou na druhé, přesto je toto kritérium využito. Němčina a švédština typologicky preferují jako hlavní způsob tvoření slov kompozici, navíc ve švédštině se určitý determinátor (tzv. určitý člen) integruje do struktury slova, tj. výskyt „dlouhých“ slov je zde neovlivnitelně vyšší než v angličtině. Tato „dlouhá“ slova jsou sice nahraditelná jiným vyjádřením, to je ale méně obvyklé.²³ U hustoty textu se nevyhodnocuje úloha tzv. pomocných sloves ve všech třech jazycích.²⁴ Co se týká slovní zásoby, zejména matematických termínů, v angličtině užívaná terminologie vychází z latiny, tudíž je pro žáka minimálně v začátcích „neprůhledná“ (např. *quadrilateral*), kdežto v němčině jsou mnohé termíny složeninami domácích slov, jde tedy o popisná pojmenování (*das Viereck*).

Relevantnost podobně koncipované studie pro posuzování jazykové stránky slovních úloh je problematická; výsledky mezijazykového srovnávání (i u příbuzných jazyků jako tři výše zmíněné) přináší o charakteristice slovních úloh zejména numerická zjištění.²⁵ Proto nebyl v našem výzkumu tento přístup uplatněn. Pokud se díváme na ty studie, které konstatovaly vztah stupně znalosti jazyka a úspěšnosti, jejich předvídatelnost (jednodušší jazyk znamená vyšší úspěšnost) byla zmíněna; jestliže se tedy autoři věnovali pouze žákům se znalostí jazyka, byl zjištěn spíše vztah úspěšnosti při řešení slovních úloh k celkové studijní úspěšnosti žáka.

²²Viz <https://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA>, cit. 18. 1. 2019.

²³Např. u německého *Informationsverarbeitungsprozess* by výsledkem náhrady byl nominální řetězec *ein Prozess der Verarbeitung der/der Information/en* prodlužující větu i celý text.

²⁴Složené slovesné tvary, fakticky ovšem tvary jednoho slovesa, nebo anglické konstrukce typu *be/have/get + jméno* jsou velmi hojné, ale jaký je jejich podíl na menší nebo větší hustotě textu, není uvedeno.

²⁵(Ibid.: s. 49–51.) Lze jen spekulovat, k jakým výsledkům by se při podobném přístupu došlo při porovnání geneticky nepříbuzných, navíc typologicky zcela odlišných jazyků, např. srovnání češtiny, maďarštiny a španělštiny.

Pro náš výzkum byl zvolen přístup, který se snaží lingvistický pohled akcentovat, a to zejména v tom směru, že rys *obtížnost* jazykového vyjádření (ve smyslu oddílu 1.2) nahrazuje rysem *problematicnost*, přičemž problematicnost je nahlížena z hlediska jazykového vyjádření samého ve vztahu k funkci/využití určitého jevu. Zčásti navazujeme na českou lingvistickou tradici (funkční přístup), většinou akcentujeme ty faktory, které ovlivňují vnímání a řešení slovních úloh v komunikaci. Slovní úloha je tedy nahlížena jako útvar, který je autorem vytvořen s jistým záměrem vůči příjemci/řešiteli.

Výběr parametrů a tvorba úloh

V literatuře najdeme různé klasifikace parametrů, jež mohou ovlivňovat obtížnost slovních úloh. Velmi podrobná je klasifikace v (Goldin, McClintock, eds., 1979), která se však týká všech matematických úloh, nejen slovních. Autoři rozdělují parametry do čtyř kategorií: parametry týkající se syntaxe, parametry týkající se matematického (např. „úlohy na věk“, „úlohy na pohyb“) a nematematického obsahu úlohy (např. úlohy se slovy *větší než, dohromady*), parametry popisující strukturu úlohy (např. počet čísel a vztahů mezi nimi, nejmenší počet výpočtů vedoucích k řešení) a parametry charakterizující heuristické procesy evokované úlohou (např. úloha řešitelná pokusem a omylem nebo pomocí analogie). Asi nejpracovnější seznam parametrů slovních úloh nalezneme v práci (Daroczy et al., 2015). Autoři na základě metaanalýzy studií, které se zabývaly slovními úlohami, sdružili zkoumané proměnné do tří skupin: lingvistické, matematické a obecné.

Výše uvedené klasifikace jsou založeny na výzkumech úloh formulovaných zpravidla anglicky, proto jsme je nepřijali. Vzhledem k odlišnosti českého a anglického jazyka jsme se rozhodli postupovat induktivní metodou a identifikovat možné parametry obtížnosti slovních úloh na základě analýzy konkrétních úloh v češtině, tedy takových, s nimiž se čeští žáci běžně setkávají. První fáze byla zjišťovací a popisná, tj. zaměřená na to, jak vůbec české slovní úlohy z hlediska své jazykové formy vypadají. V další fázi byly hlavní zjištěné charakteristiky podrobeny analýze z hlediska jednoznačnosti a transparentnosti.

2.1 Způsob analýzy slovních úloh

První krok představovalo mapování těch slovních úloh z mezinárodních a národních testování (PISA, TIMSS, CERMAT, Kalibro), v nichž čeští žáci dosáhli spíše průměrných až podprůměrných výsledků. Byl vytvořen textový korpus slovních úloh, které byly následně analyzovány s cílem identifikovat ty jejich parametry, které mohly ke špatným výsledkům přispět. Analýzy prováděli řešitelé projektu na základě své specializace, tedy např. z hlediska lingvistiky, psychologie či matematiky, a výsledkem byl první seznam lingvistických, matematických a psychologických parametrů, které se v korpusu slovních úloh vyskytovaly opakovaně, a které lze tudíž pro slovní úlohy označit za charakteristické.

V další fázi jsme vybírali slovní úlohy z běžně používaných učebnic matematiky pro základní školu, z internetových zdrojů či méně obtížné slovní úlohy z výše zmíněných testování. Při analýze jejich zadání jsme zjišťovali, zda kromě parametrů, které jsme už identifikovali, neobsahují ještě další. Došlo k obohacení seznamu parametrů, který jsme postupně dopracovali s cílem postihnout problematiku v maximální komplexnosti. V této fázi nebylo důležité, zda jsme předpokládali (či zda to bylo v literatuře prokázáno), že daný parametr skutečně obtížnost ovlivňuje a do jaké míry.

Identifikované parametry by bylo možné rozdělovat podle různých hledisek. Jedním z nich je rozdělení na parametry spjaté se zkušenostním kontextem, ve kterém je slovní úloha formulována, s výběrem jazykových prostředků a sémantikou textu slovní úlohy, na parametry spojené s matematizací slovní úlohy a s matematickou strukturou slovní úlohy. Toto rozdělení jsme přijali jako východisko pro další výzkum.

2.2 Parametry zadání slovních úloh

Identifikované parametry jsme sdružili do tří větších skupin, které stručně popíšeme v oddílech 2.2.1 až 2.2.3. Největší pozornost bude věnována jazykové stránce slovních úloh v oddíle 2.2.2, protože ji považujeme za velmi důležitou, a přitom se jí dosud nedostalo tolik výzkumné pozornosti jako stránce matematické. V oddíle 2.2.4 uvedeme, které parametry jsme z uvedeného seznamu vybrali pro hlubší zkoumání.

2.2.1 Zkušební kontext úlohy a způsob zadání

Zastřešující charakteristikou slovní úlohy je její zkušební kontext. To, zda žáci mají s kontextem přímou, zprostředkovanou či žádnou zkušenost, může významně ovlivnit úspěšnost řešení úlohy, stejně jako případný motivační potenciál kontextu. Zkušebnímu kontextu se věnuje kap. 5, proto se jím zde více zabývat nebudeme.

S kontextem úzce souvisí parametr *jazyková explicitnost*, jejíž součástí jsou i implicitní údaje. Jedná se o takové údaje, které nejsou zadány, ale žák si je má na základě své zkušenosti uvědomit (např. že leden má 31 dní, hodina 60 minut atd.). K němu inverzní je parametr *nadbytečný numerický údaj*, kdy musí žáci nějaký číselný údaj či údaje ze zadání zanedbat. Kromě nadbytečného údaje může úloha obsahovat i informace, které nejsou pro řešení důležité (viz kap. 6).

Slovní úloha může být zadána konceptuálně, nebo procesuálně (viz také oddíl 5.3.5). Konceptuální zadání je takové, které je uvedeno jako „popis situace, která se s časem nemění“. Příkladem je konceptuálně formulovaná úloha: „Do finále turnaje v piškvorkách se dostali čtyři soutěžící. Kolik zápasů se ve finále odehrálo, když hrál každý soutěžící s každým jeden zápas?“ Procesuální zadání sestává z posloupnosti „informací o změnách v situaci, ke kterým postupně dochází“ (Novotná, 2000: s. 25). Analogická úloha formulovaná procesuálně zní: „Do finále turnaje v piškvorkách se dostali Jana, Marek, Tereza a Veronika. Nejprve hrála Jana proti Tereze, pak Marek proti vítězce i proti poražené a nakonec Veronika se všemi finalisty. Kolik zápasů se ve finále odehrálo?“ V této variantě se více uplatňují žákovy kompetence v českém jazyce. Musí si uvědomit význam slova *poražený*, které zde figuruje – pro žáka možná nezvykle – jako substantivum, nebo slova *finalista*.

Jak bylo uvedeno, aby byl žák v řešení slovní úlohy úspěšný, musí být schopen v textu vyhledat údaje a pochopit, k čemu se vztahují. Z tohoto hlediska je důležitou charakteristikou slovní úlohy vzdálenost číselné informace od jejího nositele (např. jméno aktéra je zmíněno na začátku zadání úlohy a číslo k němu se vztahující je buď na konci stejné věty, nebo až na konci celého zadání). Numerická data v zadání mohou být řazena v pořadí, v jakém je žák potřebuje pro výpočet, nebo může být toto pořadí narušeno (např. počáteční stav, ke kterému se vztahují ostatní čísla v úloze, je zmíněn až na konci zadání). V úloze se tedy mění parametr *pořadí informací* (viz kap. 9).

S orientací v textu slovní úlohy může žákovi pomoci zvýraznění části textu či grafické ztvárnění textu (např. věty mohou být strukturovány do odstavců, či mohou tvořit jednolitý text).

Slovní úlohy jsou zpravidla otevřené, nicméně daly by se formulovat i jako uzavřené či přiřazovací. Další charakteristikou, u níž lze předpokládat, že ovlivní obtížnost slovní úlohy, spočívá v povaze a umístění úkolu pro řešitele. Ten může mít povahu otázky či imperativu a může být umístěn na začátku zadání úlohy, na jejím konci či jinde; může stát samostatně, nebo může být součástí věty, která obsahuje další údaje nutné pro řešení úlohy. Atp.

Mezi parametry popisující způsob zadání patří i parametr *verbální a neverbální složka slovní úlohy*, tedy přítomnost či absence obrázku (ať již ve funkci ilustrace, nositele podstatných informací, či řešitelského náčrtku, viz kap. 7). Obrázek u slovní úlohy může žáka motivovat k tomu, že se do řešení úlohy pustí, nebo ovlivnit zaměření jeho pozornosti na určité aspekty úlohy či mu pomoci vizualizovat si popisovanou situaci. Přítomnost ilustrace však může mít i potenciálně negativní vliv například kvůli vysoké kognitivní náročnosti při nutnosti propojovat obrazovou a textovou reprezentaci úlohy nebo kvůli rozptylování pozornosti.

2.2.2 Obecné jazykové rysy slovních úloh

Některé rysy slovní úlohy lze souhrnně označit za *stereotypnost vyjádření* objevující se jako důsledek snahy o stručnost formulace. K formulačním stereotypům patří hlavně vysoký stupeň *kondenzace* projevující se preferováním deverbativ (neslovesných výrazů odvozených od sloves), užitím hypotaktických (syntakticky podřadicích) spojovacích prostředků a neexplicitním, mezerovitým vyjádřením určitých významových vztahů mezi složkami textu úlohy. Důvodem preferování takových formulací je u hypotaktických vyjádření skutečnost, že jsou v češtině obecně považovány za kompaktnější, soudržnější; k mezerovitým vyjádřením vede patrně spoléhání na to, že určité přístupy k interpretaci slovní úlohy bývají v rámci předmětu (tj. výuky matematiky) presuponované (např. je-li třeba rozdělit ovoce do misek,²⁶ předpokládá se, že má být rozděleno ve stejných počtech; počítá-li se, kolik spotřebovala zvířata krmiva, u všech se předpokládá stejná spotřeba apod.). Dalším formulačním stereotypem, opačným uvedené kondenzační tendenci, je deskriptivní užívání *kognitivně-postojových predikátů*, které úlohu buďto rámuji, nebo jsou do ní začleněny, např. „Prodavačka ví, že musí zabalit 600 knih.“, „Řidič tramvaje si pamatuje, že na zastávce přistoupilo 5 cestujících.“ apod. Pro řešení úlohy nejsou tyto predikáty nutné a ve výsledku text úlohy prodlužují (vytvářejí další *rovinu sdělení*).

Většinu těchto jevů lze označit za rysy potenciálně problematické. Jde o formulace, které jsou z hlediska gramatické normy současné češtiny příznakové, protože jsou netransparentní, nejednoznačné, resp. dokonce zavádějící, tudíž mohou objektivně ztěžovat porozumění a následně převedení do matematického jazyka. Samo jejich užívání ovšem představuje jednu z pragmatických presupozic, které jsou se slovními úlohami jakožto komunikátem spojeny („takhle se to ve slovních úlohách běžně píše/říká“). K pragmatickým presupozicím může patřit i potenciálně pozitivní vliv personifikované perspektivy – není to objektivizovaný popis, ale popis z perspektivy nějaké osoby, která patří do zkušenostního kontextu dítěte. Pokud dítě nemá dostatečně vyvinuto abstraktní myšlení, může být personifikovaná perspektiva nápomocná.

Významnou roli v jazykové formulaci slovních úloh hraje pořadí, v jakém jsou v úloze uváděny informace. Proto je třeba se zmínit o jevu označovaném v lingvistice jako *funkční větná perspektiva* (*functional sentence perspective*, FSP), resp. *topic – focus articulation* (TFA); často se hovoří též o *informační struktuře věty*. V původní koncepci z první poloviny 20. století se tato problematika zkoumala (Mathesius, 1924, 1939, 1947) jako vztah gramatické stavby oznamovací věty a jejího „učlenění“, tj. jako vztah struktury „subjekt – predikát – komplement“ ke slovosledu a k prozodii (především umístování důrazu). Funkcí slovosledu a prozodie je z hlediska významu právě rozčlenění na „to, o čem se ve větě mluví“ a na „to, co se o tom vypovídá“. Pro první z těchto dvou pojmů (tzn. jazykové vyjádření „dané“ informace, kterou má posluchač pohotově, nebo o níž je to produktorem presuponováno) se užívají termíny *základ*, *východisko*, *téma* věty (popř. výpovědi), angl.

²⁶Ilustrační ukázky jsou vybrány ze slovních úloh, které jsme analyzovali (viz oddíl 2.1).

topic, pro druhý pojem (odpovídající „nové“ informaci, popř. novému nebo aktualizovanému vztahu mezi prvky „danými“) mají různé přístupy termíny *jádro*, *ohnisko/fokus* věty (popř. výpovědi), *réma*, *comment*. V původní Mathesiově koncepci (přetrvávající ve zjednodušené podobě ve školské praxi dodnes) šlo pouze o „povrchový“ slovosled, kdy se bezpříznakově postupuje od základu k jádru, kdežto ve výpovědích nějak příznakových se uvádí napřed jádro a základ až po něm. V dalším rozpracování (Daneš, 1985; Halliday, 1970, 1985; Firbas, 1964, 1992; další početné zahraniční i domácí studie viz u příslušných hesel v Karlík, Nekula, Pleskalová, 2017) se dospělo k několika zásadním zjištěním. Jednak to bylo zjemnění původního dichotomického členění a rozlišení tzv. stupňů výpovědní dynamičnosti (bepříznakově výpovědní dynamičnost stoupá od začátku ke konci, ne však zcela lineárně). Dalším, důležitějším zjištěním bylo, že u FSP nejde pouze o lineární uspořádání slov na povrchu, nýbrž že zásadní je sémantický charakter prvků větné sémantiky a jejich vztahy a zapojení věty do kontextu (diskursu). Tj. např. věty (1) „Každý v této místnosti zná dva jazyky.“ a (2) „Dva jazyky zná v této místnosti každý.“ mají každá jinou sémantickou strukturu, a tedy i jiné pravdivostní podmínky: (1) o každém v této místnosti platí, že zná dva jazyky (jakékoli); (2) jsou dva jazyky (např. čeština a slovenština), které zná v této místnosti každý. Ještě výrazněji tento faktor vystupuje u vět s negací (podrobně viz Hajičová, 1975, 2014). Např. věta (3) „Honza nepřišel kvůli Anežce.“ může mít, v závislosti na tom, co je v ní ohniskem (vyznačeným důrazem), trojí interpretaci: (a) Honza nepřišel, a to kvůli Anežce; (b) Honza nepřišel, ale nebylo to kvůli Anežce; (c) Honza přišel, ale ne kvůli Anežce. Prozodie (zejména umístování důrazu) a lineární slovosled jsou tedy vyjadřovacími prostředky FSP/informační struktury.

V souvislosti se slovními úlohami, které jsou zpravidla prezentovány v psané podobě, se umístování důrazu neuplatňuje (neuvažujeme o situaci, kdy některý z aktérů komunikační situace ve škole úlohy čte nahlas – žák, učitel apod.), platí však, že kompetentní rodilý mluvčí si na základě své komunikační zkušenosti určité slovosledné pozice (zejména koncovou) s elementárními intonačními vzorci, a tedy i s důrazem, intuitivně (vnitřně) asociuje. Typické pro slovní úlohy je ale naopak uspořádání, kdy se v tematické/základové pozici objevuje bez uvedení složka kontextově zcela nezapojená („nová“), např. „Sestřenice Hana nakupuje sešity [...]“; „Na výzdobu školní haly byly použity [...]“; „Rodina Šimáčkových využila [...]“ apod.

Slovní úlohy se z hlediska vztahu k FSP jeví jako specifické komunikační útvarry. Jejich informační struktura je totiž stabilní (reprezentuje stejný situační a matematický model) bez ohledu na to, jak jsou jednotlivé složky jejich textu povrchově zorganizovány. Při záměrně prováděných změnách pořadí při uvádění údajů nutných pro výpočet (sestavění matematického modelu, viz kap. 9) jde tedy jen o zdánlivé změny jejich dynamičnosti v rámci komunikátu (slovní úlohy) jako celku; model, který vyjadřují, je vzhledem k záměru produktora neměnný (o výsledcích zkoumání vlivu FSP na úspěšnost žákovských řešení viz oddíl 8.3.1).

Dále se budeme slovní úloze věnovat z hlediska užívání jazyka, kdy představuje jisté sdělení/komunikát (*message*, srov. Hirschová, 2017). V tomto sdělení je implicitní komunikující subjekt (autor/produktor/zadavatel úlohy), který adresátovi (potenciálnímu řešiteli) popisem nějaké výchozí situace nebo souboru údajů zadává úkol. Úkol pro adresáta je následně specifikován otázkou, kterou se autor na adresáta obrací (*kolik/jak velký* apod.), případně je mu autorem úkol zadán formou imperativu (*zjistí/sestav/vypočítej*). Zadání úkolu, tj. z komunikačního hlediska direktivní řečové jednání, může být vůči řešiteli podpořeno užitím nutnostního modálního výrazu dotvářejícího „naléhavost“ úkolu, např. „kolik musí koupit [...]?“ nebo modálního výrazu implikujícího variantnost řešení,

např. „jak mohou být rozděleny [...]“²⁷ Z tohoto funkčně-obsahového hlediska mají úlohy dvojsložkovou, respektive trojsložkovou strukturu

$$S(M),$$

v níž S je autorská rovina, autorovo implicitně ukotvené funkční sdělení „já zadávám tobě úkol“, M je autorem zadaný text úlohy (*message*). M se dále diferencuje na složku M_1 , v níž se popisuje výchozí situace obsahující údaje důležité pro úlohu, a na úkolovací složku M_2 , která se zakládá na situaci popsané v M_1 . M_1 má podobu např. „autobus jede nějakou rychlostí z bodu A do bodu B “; „školní zájezd pro celou třídu stojí x Kč a dosud zaplatilo tolik a tolik žáků“; „v marketu je cena 1 kg pomerančů o x % nižší než cena 1 kg citronů, ale o x % vyšší než cena 1 kg jablek“ apod.; sama složka M_1 může být popisem úkolu, který má splnit jednáající osoba – „Honza má koupit 12 rohlíků a [...]“.

Složka M_2 vychází/vyplývá z M_1 a stanovuje úkol. Nejde o vyplývání/entailment v logickém smyslu, nejde ani o „roviny“ v představě tradičního strukturalismu, nýbrž o navazování, řetězení. Jakožto komunikát má tedy matematická slovní úloha stavbu

$$S(M_1 \rightarrow M_2).$$

Jádrem skupiny problémů spojených se slovními úlohami je právě sám fakt, že úloha je formulována slovy přirozeného jazyka. Řešitelé jsou nuceni, aby jednu formu zadání úkolu převedli na formu jinou, matematicky formulovanou, tedy aby rozeznali, které z údajů obsažených ve slovní úloze (v její složce M_1) reprezentují prvky matematického zadání a mohou (mají) být převedeny na matematické entity, s nimiž se následně bude operovat. Dále musejí zvolit postup (algoritmus) řešení, tzn. použít identifikované podstatné složky v určitých, ke správnému výsledku vedoucích operacích. Jestliže je jazykové vyjádření slovní úlohy stručné, a navíc je formulováno tak, že část složek úlohy je již matematizována a složky určené k matematizaci jsou v textu zřetelné (vyžaduje se pouze jejich další použití; viz např. „U čerstvých hub představuje 90 % jejich hmotnosti voda. Sušené houby naproti tomu obsahují pouze 12 % vody. Kolik kg sušených hub dostaneme z 10 kg čerstvých hub?“), interpretace a následné řešení slovní úlohy může být jednoduché. Jestliže však je slovní úloha vyjádřena relativně rozsáhlým textem obsahujícím mnoho údajů, které musejí být odfiltrovány, aby mohly být nalezeny prvky použitelné k matematizaci, je úkol obtížnější, resp. formulace může mít u řešitele demotivující účinek (Sigmundová, 2019).

Tedy i sama výstavba sdělení se vyznačuje jistou mírou stereotypizace. Nyní se na prostředky stereotypnosti v zadání slovní úlohy podíváme podrobněji.

a) Kondenzace

Hlavním důvodem, proč autoři slovních úloh volí kondenzovaná vyjádření, je snaha o stručnost, kompaktnost formulace, roli zde však nepochybně hraje právě tlak stereotypnosti (mnohé úlohy se opakují, pouze se naplňují jiným lexikálním materiálem). Uvedeme příklady kondenzovaných vyjádření.

- a) **Užívání deverbativních kondenzátů.** Např. *dovoz materiálu na stavbu; po sečtení všech zvířat; uvažují o společné koupě hry; zvýšení koncentrace soli v roztoku.*
- b) **Atributy s kondenzačním významem.** Např. *při každodenním zalévání; sbíraly sušenou hluchavku* (zde se navíc výrazně uplatňuje myšlenková zkratka); *na poli s rozlohou 52 ha; Eva dostala k svátku višňovou, oříškovou a mléčnou bonboniéru* (tj. Eva

²⁷O modálních výrazech viz oddíl 8.1.1.

dostala bonboniéru, ve které byly višňové, oříškové atd. bonbony; je také otázka, zda šlo o jednu bonboniéru, nebo o tři, podobně viz ilustrace (4), s. 30).

- c) **Vztažné věty popisující děje/stavy, které nepředstavují atribut substantiva.** Např. *Nakupují sešity v internetovém obchodě, kde právě dnes stojí všechny červené linkované sešity stejně; Jak dlouhá je budova, podél které projedeme za 14 sekund?*
- d) **Vztažné věty popisující děje/stavy v čase následující.** Např. *Nasbíraly sušenou hluchavku, za kterou ve sběrně dostaly 50 Kč; Děti dostaly krabici kostek, které si rozdělily.*

V případech b) až d) nemusí u žáků docházet k neporozumění a následné misinterpretaci, jde spíše o to, že text takto formulovaný nesplňuje požadavek preciznosti, který se naopak uplatňuje na řešitele (nutnost vytvořit správné řešení správným postupem a provést zkoušku).

- e) Velmi zřetelným a typickým rysem jazykové stránky slovních úloh je vyjadřování jednoho z údajů nebo úkolu větou připojenou **kauzální spojkou**, která zde **nepředstavuje skutečný kauzální vztah** (tj. neimplikuje nutnost výsledného stavu, srov. Materna, Pala, Zlatuška, 1989: s. 29–30). Uvedeme několik příkladů:
- „Kolik peněz dostala Petra a kolik Veronika, jestliže Petra nasbírala o 25 % květu více než Veronika?“
 - „Vydrží tato zásoba pro všechny koně, pokud nechceme zmenšit krmné dávky?“
 - „Jestliže Honza ví, že jeden oběd stojí 35 Kč, kolik obědů si může koupit?“
 - „Kolik kilometrů jsou od sebe vzdálena dvě města, když vzdálenost mezi nimi na mapě je 9 centimetrů?“

V uvedených úlohách nejde o podmínková souvětí ve vlastním slova smyslu. Užití kauzálních spojek je přeneseno z úloh, u nichž skutečně jde o vztah odpovídající logickému spojení „jestliže → pak“, např. „Jestliže jeden balík papíru váží 6 kg, kolik dohromady váží 8 stejných balíků papíru?“

V úlohách uvedených výše však spojky *jestliže/pokud/když* představují formulační stereotyp, který je rovněž nutno korigovat na základě zkušenosti (komunikační kompetence) se zadáváním podobných úkolů. Produktor zde očekává, že řešitel ví (ve své vzdělávací praxi se již s podobnými úlohami setkal), „co se tím obvykle myslí“, a dále spoléhá na řešitelovu mimojazykovou zkušenost (inferenci). Např. to, že osoba A odvedla procentuálně větší objem (stejně) práce než osoba B, není nutnou podmínkou (resp. působící příčinou) toho, že by měla dostat o stejné procento více zapláceno („jestliže/protože A odpracoval o 50 % víc než B, dostane o 50 % víc peněz“), jde pouze o naplnění platné konvence, jejíž znalost se u řešitele předpokládá. Dále např. běžná formulace typu „Jakou jelo auto průměrnou rychlostí, jestliže vyjelo z A v 15.30, dojelo do B v 17.15 a cesta z A do B je dlouhá x km?“ vyžaduje, aby na základě znalosti řešení podobných úloh byly veličiny uvedené v zadání změněny na veličiny jiné. Nejde o jednoznačný podmínkový vztah založený na *jestliže A* (protaze, antecedent) – *pak B* (apodoze, konsekvent), jaký je např. v souvětí „Jestliže dáme cukr do vody, rozpustí se.“ / „Cukr se rozpustí, jestliže ho dáme do vody.“; převoditelný na *protože A, B* („Protože jsme dali cukr do vody, rozpustil se.“) (srov. např. Karlík, 1995: s. 16–44, 51–58)²⁸. O podmínkový vztah

²⁸Viz také https://www.czechency.org/slovník/PŘÍSLÓVEČNÉ_URČENÍ_PODMÍNKY.

(implikaci v logicko-sémantickém smyslu) v takových formulacích nejde, vyžadovaná informace/výsledek (formální konsekvent – objem peněz, rychlost auta) se zjišťuje konvenčně, přičemž zásadní operace dointerpretování se nepojmenovává (viz tzv. nepravá implikace, oddíl 8.1.2). Neznamená to ovšem, že nepravé implikace se vyskytují vždy a všude, pouze jsme zaznamenali, že spojka *jestliže* je někdy užívána mechanicky, tj. zachází se s ní na základě předpokladu „jestliže A, pak (obvykle) B“ (srov. Toulmin, 1958: s. 94–107).

Užití spojky *když* navíc představuje posun k všeobecně „časově okolnostnímu“, nikoli kauzálnímu chápání.

b) Mezerovité vyjádření (nižší míra explicitnosti)

Mezi hlavní projevy mezerovitého vyjádření náleží nejednoznačný skopus tázacího výrazu a sémantický hiát.

a) **Nejednoznačný skopus tázacího výrazu, platnost spojky.** Nejčastěji se v analýzovaných slovních úlohách objevuje nedostatečné rozlišení sjednocující a rozšiřující koordinace (fúze a expanze)²⁹. I když v běžném vyjadřování se tento rozdíl často stírá (srov. „Před domem seděl černý a bílý pes.“: 1 pes, nebo 2 psi?), resp. odstraňuje se slovním kontextem, v textu, který má být matematizován, by se měl respektovat.

U otázky (4) „Kolik stojí kytice se stuhou a beze stuhy?“ je nutno rozhodnout, zda mluvíme o jedné kytici, nebo o dvou různých. Při běžném chápání vzniku elipsy se počítá s fúzí, tj. s tím, že elidována byla složka opakující složku identickou s úkolovou (tázací) částí první otázky, tj. že významově jde o útvar „kolik stojí kytice se stuhou a kolik stojí kytice beze stuhy?“, tj. že jde o dvě různé kytice. U původní formulace však nelze vyloučit interpretaci, že se jedná o jednu totožnou kytici, z níž byla pouze odstraněna stuha.

U otázky (5) „Kolik kg vody se vypařilo z 1 kg květů a 1 kg listů?“ je nutno se dohodnout, zda se výpočet bude týkat [1 kg květů + 1 kg listů], tedy celkového množství odpařené vody bez rozlišení toho, ze které části rostliny pocházela, nebo zda se bude počítat množství vody odpařené z květů a množství odpařené z listů zvlášť, tj. [kolik z 1 kg květů] + [kolik z 1 kg listů].

b) **Sémantický hiát.** V určitých případech je interpretace mezerovitého vyjádření součástí řešení:³⁰

(6) HT2_4D1 Stonožky Věrka a Františka vyráží na výlet. Začaly se obouvat ve stejnou chvíli, ale Františka se obouvá rychleji. Za tutéž dobu, za kterou Věrka obuje 5 bot, obuje Františka 10 bot. Kolik bot má na sobě Františka, jestliže Věrka právě obula patnáctou botu?

Zde je ze strany řešitele nutné doplnění „10 je dvojnásobek 5“ atd. (výsledky testování úlohy viz oddíl 13.3.1).

(7) HT1_6C4 Prodavač v knihkupectví ví, že mu pracovníci skladu poslali 6krát více knih, než bylo krabic potřebných k jejich zabalení. Knihy zaplnily přesně 810 krabic. Kolik knih prodavač dostal?

V této úloze není zcela jasná formulace vztahu mezi počtem knih a počtem krabic, resp. je nutné vyvodit, že se mají spočítat knihy, které byly dodány v oněch 810 krabicích.

²⁹Srov. <https://www.czechency.org/slovník/KOORDINACE>.

³⁰Pokud se u úloh v následujícím výkladu objeví kód (např. HT2_4D1), jedná se o úlohu z našeho testování.

Interpretování formulace „knihy zaplnily“ jako toho, že jde právě o ty krabice, v nichž byly doručeny knihy, které je třeba spočítat, je pro řešení nadbytečný krok (výsledky testování úlohy viz oddíl 10.3.2).

Podobné formulace vedou k tomu, že řešitel je nucen významy v úloze vyjádřené inferenčně doplňovat, tj. pracovat s tím, jak byla úloha zadavatelem nejpravděpodobněji míněna – např. u ilustrace (4) se pravděpodobně míní dvě kytice ze stejného počtu stejných květů; na jedné z nich je stuha s (předpokládanou) fixní cenou, na druhé nikoli.³¹ U ilustrace (5) ovšem v dané formulaci rozhodnout nelze a možnost, která se bude počítat, musí být zvolena.

c) Kognitivně-postojové predikáty

Některé úlohy jsou produktorem formulovány tak, že před vlastní M_1 autor do zadání vsouvá další, a to explicitní složku (S_a), v níž popisuje situaci (M_1) jako dění týkající se uvažování nebo postojů fiktivní osoby: (8) „Pepa ví, že jedna tužka stojí o [...]“, (9) „Prodávač v knihkupectví ví, že [...]“, (10) „Řidič autobusu si pamatuje, že [...]“.

Podobné úlohy mají tedy stavbu

$$S(S_a(M_1)) \rightarrow (M_2).$$

Ve složce, kterou označujeme jako S_a (explicitní rozšíření autorského zadání), se vyskytují slovesa popisující ve tvaru 3. osoby kognitivní postoje nebo mentální stavy a procesy oné fiktivní osoby (proživatele postoje). Vždy jde o postoje atd., které z hlediska epistemické modalit fungují jako tvrzení nezpochybňující platnost údajů uváděných v M_1 , tj. M_1 není relativizována. Takové formulace vyžadují, aby řešitel k úloze nejprve přistupoval z pozice oné fiktivní osoby, tj. aby nejprve bral na vědomí postoje atd., které produktor fiktivnímu proživateli připisuje, pro adekvátní řešení úlohy je však nezbytné, aby řešitel následně od této složky narace abstrahoval. Neznamená to, že tyto interpretační kroky, tj. identifikace a následné abstrahování od ní, nutně musí být explicitně reflektovány, tedy slovně vyjádřeny; zpravidla probíhají intuitivně, zůstávají implicitní.

Variantu S_a představují formulace, kdy je kognitivní postoj vyjádřen tvarem 1. osoby: „Jestliže *vím*, že jeden oběd ve školní jídelně stojí x Kč, kolik obědů si mohu koupit [...]“; „Kolik obědů ve školní jídelně si mohu koupit, jestliže *vím*, že [...]“. Zde je kognitivní postoj S_a spolu s M_1 (školní jídelna) začleněn do M_2 , stavba slovní úlohy je v takovém případě nikoli kontinuálně zarámovaná, ale navrstvená. To lze schematicky vyjádřit:

$$S(M_2(S_a(M_1)))$$

Užitím tvaru 1. osoby je formulace zdánlivě jednodušší, ve skutečnosti však také od řešitele vyžaduje, aby si nejprve uvědomil, že 1. osoba nereprezentuje jeho samého, nýbrž autora/produktora, tj. při zpracování se od řešitele rovněž vyžadují dodatečné kroky. Jak příklady ukazují, z hlediska řešení úlohy je uvádění kognitivního postoje S_a redundantní – údaje potřebné pro řešení v ní obsaženy nejsou. U formulací typu „Jestliže *vím*, že jeden oběd stojí [...], kolik obědů si mohu koupit za [...]“ samozřejmě také nejde o regulérní podmínkové souvětí, ale zároveň o projev kondenzační tendence (viz výše), protože možný počet koupených obědů nezávisí na mé (čikoli) *znalosti* ceny. Složka S_a tedy může být odstraněna. Otázka je, nakolik to řešení usnadní, protože úloha se sice zkrátí a minimálně jeden krok k řešení odpadne, text by se ale, zejména v některých případech, zároveň podstatně ochudil.

³¹I kytice ze stejného počtu stejných květů však může mít různou cenu podle toho, jaká stuha na ní je.

Posledně zmíněný jev jsme vytkli jako samostatný parametr a nazvali jsme jej *roviny sdělení*. Podrobně se mu budeme věnovat v oddíle 8.3.4.

d) Výskyt modálních výrazů

Jak bylo uvedeno, modální výrazy se mohou objevit jak ve složce M_1 , tak ve složce M_2 . Ve složce M_1 bývají součástí popisu výchozí situace, kdy produktor evidentně nezamýšlí zapojit modální význam jako složku úkolu. Skutečnost, že „pan Novák chce/potřebuje/plánuje postavit nový plot kolem zahrady“, popř. že „výrobce plechovek musí pro splnění objednávky rozšířit pracovní dobu“ apod., je v daném kontextu pouze modifikátorem obsahu, na matematizaci a řešení nemá vliv.

Jiná situace nastává, jestliže je modální výraz uveden u takové obsahové složky, která následně vytvoření modelu zásadně ovlivňuje jako jedna z nabízených variant řešení (modální význam možnosti) nebo jako stanovená nezbytná podmínka (modální význam nutnosti) splnění úkolu, např.: (12) „Děti mohou být ubytovány ve třílůžkových nebo čtyřlůžkových pokojích.“ (13) „(Honza dluží Pavlovi 17 Kč. Honza má pouze dvoukoruny, Pavel pětikoruny.) Jak se mohou vyrovnat?“ (14) „Sportovci musí nastoupit ve trojstupech, ale nemohou nastoupit ve čtyřstupu.“ (15) „Kterým autobusem musí Honza jet, aby stihl vlak v 16.30?“

V takových případech, i když z hlediska tvorby slovní úlohy jde o produktorský záměr, tj. o některý z deontických významů, bývají „možnost“ a „nutnost“ prezentovány jako objektivně dané, tj. zpravidla nepřipouštějící jiný než vyžadovaný způsob řešení.³² Především významy nutnosti podporují „naléhavost“ zadaného úkolu. Modálními významy jsou i epistémické a kognitivní postoje uvedené v odstavci (c), jejich funkce je však jiná.

Vliv modálních výrazů na řešení slovní úlohy zkoumáme v kap. 8.

e) Výběr slov

Obtížnost slovní úlohy je dána i na úrovni výběru slov, protože jejich pochopení zřejmě ovlivňuje, zda je žák schopen si vytvořit situační model úlohy. Např. se v zadání úlohy mohou vyskytovat termíny z jiné než matematické oblasti (např. *akcie*, *dopravní obslužnost*, *laická veřejnost*) či nějaký čistě matematický termín (např. *parcela ve tvaru lichoběžníku*). Potíže může způsobit použití cizího slova či okazionalismu (např. *zedy* jako označení pro fiktivní měnu, viz kap. 8) nebo slova, která nemusí být v aktivním slovníku žáka (např. *areál*, *agentura*, *liberál*, *pocestný*).

Povaha spojovacích výrazů z formálního hlediska (různovětné spojky typu *ale protože*, *a přestože*) či z logického hlediska (výskyt spojovacích výrazů s pragmatickou konotací, např. *přestože*; *kvůli tomu*, *že*; *totiž*; *naopak*) je také významnou charakteristikou textu. Ve slovních úlohách se ovšem běžně užívají zejména základní spojky logické.

Některá vyjádření jsou svou povahou spíše nejednoznačná. Např. se může jednat o modální slovesa a modální výrazy (*je třeba*, *zapotřebí*, *nutno*, *lze*), kvantifikátory (*několik*, *všichni*, *každý* apod.) či jiná vyjádření přibližné kvantity. U jiných musí žák znát význam znaků daných konvencí (např. výsledky zápasů bývají odděleny dvojtečkou stejně jako zápis digitálních hodin).

Z hlediska matematiky můžeme hovořit o vlivu jazykového a nejazykového vyjádření matematických údajů (např. $1/2$ šálku vs. polovina šálku, viz oddíl 7.3.1) či přítomnosti fyzikálních jednotek.

Žákům běžně známá slova mohou působit problémy, pokud jsou použita v roli antisignálu, tedy navádějí k jiné operaci, než která se má pro správné řešení použít (viz

³²Např. v úloze s dluhem se nepřipouští, že by Honza vrátil Pavlovi pouze 2 nebo 4 koruny, a dluh by buď pokračoval, nebo by se dlužníkem stal Pavel.

kap. 12). Např. slovo *vyhrál* v úloze „Petr hrál kuličky. Vyhrál 5 kuliček, takže po hře měl 8 kuliček. Kolik měl před hrou?“ by navádělo ke sčítání obou čísel. Některá slova či vyjádření jsou si natolik graficky blízka, že mohou žákům činit problémy, jako např. slovo *kolikrát* vs. *o kolik*.

Při našem testování byly brány v úvahu i další jazykové rysy, a to délka textu, podíl neverbální složky na celkovém textu úlohy a pořadí, v němž jsou údaje nutné pro řešení uváděny. Tyto rysy se ovšem překrývají s parametry matematickými – délka textu s uváděním nadbytečných informací a s poměrem relevantních/irelevantních informací (kap. 6), podíl/úloha neverbální složky (ne/přítomnost ilustrace, ne/uvádění údajů v ilustraci) s kognitivní náročností úlohy (kap. 7), pořadí informací (FSP) s využitím tzv. antisignálu (kap. 9 a 11). Sémantické vztahy mezi obsahy složek úlohy jsou zkoumány jako ne/přítomnost funkční vazby (kap. 10), užití synonym v souvislosti s modálními slovesy (kap. 8). Proto jsou probírány v kapitolách věnovaných těmto matematickým parametrům. Samostatně (z psychologického pohledu) byl zkoumán vliv (především zkušenostního) kontextu (kap. 5).

2.2.3 Matematické parametry

Nejvíce patrnou matematickou charakteristikou slovní úlohy je číselný obor, v němž se žák musí pohybovat, tedy zda se jedná o přirozená čísla, záporná celá čísla, desetinná čísla, zlomky, racionální čísla obecně či reálná čísla. Na hlubší úrovni je ovšem důležité i to, jak má daná skupina žáků čísla v rámci daného oboru a vztahy mezi nimi zažité. Např. některé zlomky jsou u žáků více zažité než jiné, což přirozeně odpovídá i realitě běžného života (srovnej $1/3$ vs. $1/11$), velká přirozená čísla jsou pro žáky 2. ročníku méně známá apod.

Slovní úlohy mohou být řešitelné pomocí jednoho výpočtu (pak je nazýváme *jednoduché*, Divíšek et al., 1989, *jednokrokové* či *s jednou triádou*, Rendl, 1997) nebo vedou k více výpočtům (pak hovoříme o *složených*, *vícekrokových* či *vícetriadických* úlohách). Slovní úlohy jsou tedy vytvářeny různým počtem triád, přičemž tyto triády mohou být aditivní či multiplikační a mohou tvořit různě složitou strukturu (Rendl, 1997). Triáda je „tušením či vědomím souvislosti čísel. Vztah dvou čísel vyjádřený třetím konstituuje triádu – tři čísla, která nějak patří dohromady“ (Rendl, 1997: s. 197).

V historii zkoumání jednoduchých slovních úloh bylo opakovaně ukázáno, že slovní úlohy vedoucí ke stejné aritmetické operaci (výpočtu) ještě nemusí být stejně náročné (např. Vergnaud, 1982; Cummins et al., 1988; Verschaffel, De Corte, Pauwels, 1992). Například u následujících dvou úloh je výpočet vedoucí k nalezení odpovědi na otázku stejný ($3 - 1 = 2$), úloha 2 je ale náročnější.

Úloha 1: Lukáš je o 1 rok mladší než Roman. Romanovi jsou 3 roky. Kolik let je Lukášovi?

Úloha 2: Lukáš je o 1 rok mladší než Roman. Roman je o 3 roky starší než Honza. O kolik let je Lukáš starší než Honza?

Pro pochopení rozdílů mezi uvedenými úlohami je potřeba si nejprve uvědomit, jakými různými způsoby jsou čísla ukotvena v životní zkušenosti a v jakých *rolích* tedy mohou v zadání slovních úloh vystupovat. Čísla mohou představovat *kvantitativní* nebo vztahy mezi kvantitativními – *relace* (Nunes, Bryant, 2015). Relace nám dovoluují uvažovat i o kvantitativních, které nejsou vyjádřeny čísly (např. „Jestliže je Lukáš mladší než Roman a Roman starší než Honza, pak je Roman nejstarší.“).

My zde vyjdeme z terminologie, kterou nabízí Hejný a Stehlíková (1999) a Hejný (2014). Můžeme rozlišit číslo jako *kvantitu* („tramvaj jede 7 minut, má 2 vagóny“), *identifikátor* (*adresa*: „pokoj číslo 16“, „začneme v 9.00“; *jméno*: „tramvaj číslo 16“) nebo *symbol* (číslo 4 jako symbol spravedlnosti u Pythagorejců). Kvantitu můžeme dále rozdělit na číslo jako *stav*, *operátor* a *frekvenci* („tramvaj jezdí každých 5 minut“). Stav může být buď *počet* měřitelný na kusy („2 vagóny“) nebo *veličina* měřitelná v jednotkách („7 minut“). Číslo jako operátor reprezentuje vztah dvou stavů, přičemž jedná-li se o vztah dvou různých objektů, mluvíme o *operátoru porovnání* („v předním vagónu je o 6 cestujících více než v zadním“), když se jedná o různé stavy jednoho objektu např. v různých časech, mluvíme o *operátoru změny* („do tramvaje přistoupili 4 cestující“).³³

Ve slovních úlohách se nejčastěji setkáme s čísly v roli stavu a operátoru, různě spolu svázanými. Například:

stav 1 _____ operátor _____ stav 2

Lukášovi jsou 4 roky; Lukáš je o 3 roky mladší než Roman; Romanovi je 7 let

Číslo 3 („o 3 roky mladší“) neudává konkrétní věk Lukáše nebo Romana, ale zachycuje (kvantifikuje) jejich vzájemný vztah, určitou informaci o jejich věku tedy poskytuje. V čísle 3 je stav 1 i stav 2 virtuálně přítomen (Hejný, 2014: s. 159). Práce s operátory je považována obecně za náročnější než práce se stavy (Vergnaud, 1982).

Čísla v zadání jednoduché slovní úlohy ($a \pm b = c$) tak mohou figurovat v roli stavu (S) či operátoru (O). Jejich kombinací získáme různé typy jednokrokových úloh: $S_1 \pm S_2 = S_3$, $S_1 \pm O_1 = S_2$, $O_1 \pm S_1 = S_2$, $O_1 \pm S_1 = O_2$ atd. Nejjednodušším typem je úloha, v které figurují pouze čísla v roli stavu (*combine problems*,³⁴ slučovací):

Úloha 3: Lukášovi jsou 4 roky. Romanovi je 5 let. Kolik let je jim dohromady?
 $4 + 5 = 9$, tedy $S_1 + S_2 = S_3$

Náročnější jsou úlohy se dvěma stavy a alespoň jedním číslem v roli operátoru (*compare problems*, porovnávací)³⁵:

Úloha 4: Lukášovi jsou 4 roky. Roman je o 1 rok starší než Lukáš. Kolik let je Romanovi?

$$4 + 1 = 5, \text{ tedy } S_1 + O = S_2$$

V těchto úlohách se obvykle porovnávají dvě různé kvantify (věk Lukáše, věk Romana). Jedna z nich je označována jako referenční, druhá jako porovnávaná kvantita (dle popisu situace), rozdíl mezi nimi je nazýván diferencí (např. Schumacher, Fuchs, 2012). Podle toho, která z těchto tří komponent je v úloze neznámou, lze rozlišit další podtypy porovnávacích úloh: neznámou je porovnávaná kvantita (úloha 4 výše), neznámou je referenční kvantita (úloha 5), neznámou je diference (úloha 6).

Úloha 5: Lukášovi jsou 4 roky. Je o 1 rok mladší než Roman. Kolik let je Romanovi?

$$4 + 1 = 5, \text{ tedy } S_1 + O = S_2$$

³³Hranice mezi typy operátorů je neostrá. Například „roční jízdné bylo zdraženo o 200 Kč“ mohou někteří řešitelé vnímat jako operátor změny, jiní jako operátor porovnání.

³⁴Dělení elementárních aditivních slovních úloh na *combine* (slučovací), *compare* (porovnávací) a *change* (změny) uvádí např. (Riley, Greeno, Heller, 1983).

³⁵Třetím běžně užívaným typem slovních úloh jsou *change problems*, které zachycují změnu jedné kvantify v čase, např. „Roman vážil 28 kilo. O prázdninách 3 kila přibral. Kolik vážil po prázdninách?“.

Úloha 6: Lukášovi jsou 4 roky. Romanovi je 5 let. O kolik let je Roman starší?

$$5 - 4 = 1, \text{ tedy } S_2 - S_1 = O$$

Mezi složitější případy porovnávacích jednokrokových úloh patří takové, které obsahují více než jedno číslo v roli operátoru; např. $O_1 \pm S_1 = O_2$, $O_1 \pm O_2 = S_1$ nebo $O_1 \pm O_2 = O_3$. Právě poslední jmenovaný případ je objektem našeho zájmu. Úlohu, ve které vystupují všechna čísla v roli operátoru, budeme nazývat *operátorovou*. Příkladem je úloha 7:

Úloha 7: Lukáš je o 1 rok mladší než Roman. Roman je o 7 let starší než Honza. O kolik let je Lukáš starší než Honza?

$$7 - 1 = 6, \text{ tedy } O_2 - O_1 = O_3$$

Příkladem operátorů změny jsou čísla 3 a 4 v operátorové porovnávací úloze 8³⁶:

Úloha 8: Lukáš během první poloviny roku přibral 3 kila. V druhé polovině roku 4 kila shodil. O kolik kil byl na konci roku lehčí než na jeho začátku?³⁷

Již byla zmíněna slova ve funkci antisignálu. Signální slova jsou však jen jedním z prostředků, které mohou navádět k určité operaci. Dalším může být tzv. *triáda s dobrým tvarem* (viz Rendl, 1997). Např. pokud se v úloze objeví čísla 4 a 20, lze předpokládat, že někteří řešitelé zvolí jako řešení třetí člen triády bez ohledu na strukturu úlohy. V tomto případě by to bylo číslo 5, protože čísla (4, 5, 20) tvoří triádu. Specifickým příkladem návodné triády mohou být čísla, která tvoří celočíselný poměr (viz kap. 13.3.4). Vodítkem mohou být i určitým způsobem spojené objekty v zadání úlohy (viz kap. 10).

Další typickou charakteristikou slovních úloh jsou implicitní informace, tedy takové informace (např. matematický vzorec), které musí žák vyvodit z jazykového zadání úlohy (např. žák má počítat objem sudu, o němž ví, že má tvar válce; musí tedy znát a aplikovat příslušný vzorec). Dalším příkladem matematického parametru úlohy potenciálně ovlivňující obtížnost slovní úlohy je použitá číselná soustava. Úloha může vést k počítání v desítkové soustavě, ale také v soustavě šedesátkové či dvojkové, nebo dnů v měsíci či týdnů apod. Povaha úkolu též hraje roli v obtížnosti slovní úlohy. Můžeme hledat hodnotu vstupu (kolik bylo čeho na začátku), výstupu (kolik bylo čeho na konci) či nějakého stavu mezi vstupem a výstupem. Můžeme se ovšem ptát i na to, jaká operace vede k řešení slovní úlohy, jakým výrazem lze slovně popsanou situaci popsat, zda je nějaké tvrzení pravdivé či můžeme hledat zdůvodnění nějakého tvrzení popsaného v úloze.

Konečně nemůžeme opominout zařazení úlohy do určité skupiny úloh, které lze řešit specifickým způsobem (např. úlohy o pohybu, o úměrnosti, z oblasti pravděpodobnosti).³⁸ Žáci pro ně mají často algoritmus, který mohou použít. Ve standardních úlohách tedy mohou získat správný výsledek, aniž by si vytvořili situační model. Do vlivu tohoto parametru okrajově nahlédneme v kap. 5 a jako jazykový parametr *ustálenost* ho budeme zkoumat v kap. 8. Některým aspektům úloh typu úměrnosti se budeme věnovat v kap. 13.

³⁶Číslo v odpovědi by bylo v roli operátoru porovnání, neboť k němu odkazuje otázka *o kolik*.

³⁷V učebnicích bývá podobná otázka rozdělena na dvě: „Byl na konci tohoto roku Lukáš těžší, nebo lehčí? O kolik kilo?“

³⁸Viz např. disertační práce (Šíma, 2013).

2.2.4 Výběr parametrů

Uvedený výčet parametrů slovních úloh patrně není vyčerpávající, např. u úloh určených vyšším ročníkům by bylo možné počítat s dalšími faktory, nicméně počet slovních úloh, s nimiž jsme seznam úspěšně konfrontovali, nám dává důvěru, že se jedná o parametry, které popisují významnou část charakteristik slovní úlohy.

Každá slovní úloha v sobě ale obsahuje nikoli jen jeden, nýbrž celou řadu parametrů, z nichž každý nějakým způsobem přispívá k její obtížnosti. Pokud chceme zjistit jak, pak je nutno formulovat dvojice variant slovních úloh, které se budou lišit právě jen tím parametrem, který chceme zkoumat. Tedy k základní variantě úlohy je formulována varianta, jejíž text je beze změny podstaty úlohy upraven, aby obsahoval zkoumaný problematický rys.

Parametry se ovšem mohou chovat různým způsobem, pokud jsou zkombinovány s jinými parametry. Některý parametr může jejich působení ještě znásobit, jiný naopak potlačit. Proto je nutné sledovat také společné působení dvou parametrů. Navíc je třeba si uvědomit, že parametry nemusí ovlivňovat obtížnost úlohy konzistentně pro všechny věkové skupiny žáků, i když je to tak občas zkratkovitě v odborné literatuře prezentováno.

Je zřejmé, že nelze prozkoumat všechny možné parametry, které připadají v úvahu, ani jednotlivě, natož v kombinacích.³⁹ V projektu jsme se proto rozhodli pro ty z nich, které se nám v průběhu vstupní analýzy jevíly jako dominantní. Jako prvním se budeme věnovat parametru *zkušenostní kontext* (kap. 5), jež chápeme jako zastřešující aspekt, vyžadující jak psychologické, tak jazykové interpretace. V pořadí druhým bude parametr *nadbytečné informace* (resp. *délka textu*), jehož součástí je i parametr *nadbytečný numerický údaj* (kap. 6). Následovat bude parametr *verbální a neverbální složka zadání slovní úlohy* (kap. 7), dále rozsáhlý soubor jazykových charakteristik slovních úloh shrnutých pod název *jazyková explicitnost* (kap. 8), poté parametr *pořadí matematických informací* (kap. 9), posléze *návodnosti* (návodnost triády i návodnost vazby, kap. 10) a další matematické parametry – *operátor a přítomnost stavu* (kap. 11), *antisignál* (kap. 12) a konečně *proporční a aditivní uvažování a úměrnosti* (sdružené do kap. 13). Tyto parametry jsme vybrali také na základě studia literatury (např. v zahraničí již byl daný parametr zkoumán a jeho vliv se v anglicky psané literatuře⁴⁰ prokázal nebo jsou výsledky nejednoznačné, nebo naopak, parametr solidně prozkoumán dosud ani v zahraničí nebyl a řešitelům projektu se jevil jako potenciálně problematický), přičemž jsme měli důvod předpokládat, že budeme schopni parametry operacionalizovat a tvořit dvojice variant odlišujících se jen oním parametrem. Detailnější zdůvodnění pro výběr parametrů bude provedeno přímo v kapitolách, které se jim věnují.

2.3 Tvorba úloh

Již ve fázi tvorby seznamu parametrů jsme u každého z nich vytvářeli ilustrační dvojice, trojice či čtveřice úloh. Z jedné základní varianty úlohy jsme pomocí reformulace vytvořili další, která se od základní lišila právě jen v jednom parametru. To se ovšem ukázalo jako nečekaně obtížné, protože se často se změnou parametru úloha také zkrátila či častěji prodloužila nebo se změnil nějaký jiný její jazykový rys. Přeformulovaná věta byla

³⁹Ani u vybraných parametrů nebylo možné jejich vliv otestovat v úplnosti, tedy pro všechny relevantní ročníky a pro typy úloh či kontexty, které by se nabízely. Počet vln testování byl omezený (celkem 6) stejně jako počet úloh v každém testu.

⁴⁰Pokud je nám známo, v českém prostředí kontrolovaná studie vlivu parametrů na obtížnost slovních úloh provedena nebyla. Spíše jsou známy studie, v nichž se ukazuje nízká úspěšnost českých žáků ve slovních úlohách a prostřednictvím rozhovorů či analýzy písemných řešení se autoři snaží najít příčinu jejich selhání (Vondrová, Rendl et al., 2015).

nesrozumitelná nebo nejednoznačná nebo došlo k nechtěnému posunu významu. Hledání vhodných synonym bylo také obtížné.

Na následujících dvojicích variant přiblížíme způsob, jakým jsme tvořili např. varianty s antisignálem.

[HT2_6H1] Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Sobotní výlet byl 1,5krát delší než nedělní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?

[HT2_6H3] Rodina Šimáčkových využila prodloužený víkend k turistice. V neděli podnikli výlet o celkové délce 19,5 km. Nedělní výlet byl 1,5krát kratší než sobotní. Kolik kilometrů ušli během sobotního výletu?

V tomto případě byla potřebná změna zadání minimální – 1,5krát delší bylo zaměněno za 1,5krát kratší a v téže větě byla zaměněna adjektiva *sobotní* a *nedělní*. U některých úloh však nebyla podobná změna z jazykového hlediska proveditelná. Příkladem je dvojice variant HT2_9A2 a HT2_9A4 (viz tabulka níže). Při důsledném zachování počtu slov by věta s antisignálem zněla „Pavla má o 216 Kč víc než Marie a Pavla má o 150 Kč méně než Dana.“, čímž by vzniklo stylisticky nevhodné souvětí, kterému se čeština vyhýbá pomocí elipsy podmětu a slovesa. V podobných situacích byla tedy volena jazykově vhodnější varianta, i když pak byla základní variantě vzdálenější, a potenciálně mohla mít vliv na náročnost porozumění úloze.

Protože jsme plánovali rozdělit žáky na čtyři výkonnostně vyrovnané skupiny (viz oddíl 3.4.3), měli jsme možnost tvořit dvojice variant (typ 1 + 1), které se liší právě v jednom parametru, nebo čtveřice variant (typ 2 + 2), pomocí nichž lze zjistit vzájemný vliv dvou parametrů. Varianty úlohy Marie a spol. v tabulce níže se v řádku liší přítomností nadbytečného numerického údaje, zatímco ve sloupci přítomností antisignálu (typ 2 + 2). Pokud by se např. varianta 9A2 ukázala jako obtížnější než 9A1, pak by to bylo dáno přítomností nadbytečného údaje. Pokud by se varianta 9A4 ukázala jako obtížnější než 9A1, a přitom varianty 9A1 a 9A3, resp. 9A2 a 9A4 by byly srovnatelně obtížné, pak by to bylo způsobeno kombinací obou parametrů, tedy přítomností nadbytečného numerického údaje a přítomností antisignálu.

	bez nadbytečného numerického údaje	s nadbytečným numerickým údajem
bez antisignálu	[HT2_9A1] Marie, Dana a Pavla mají dohromady 1 614 Kč. Pavla má o 216 Kč víc než Marie a Dana o 150 Kč víc než Pavla. Kolik Kč má Marie, kolik Dana a kolik Pavla?	[HT2_9A2] Marie, Dana a Pavla mají dohromady 1 614 Kč. Pavla má o 216 Kč víc než Marie a Dana o 150 Kč víc než Pavla. <i>Uvažují o společné koupi hry za 144 Kč.</i> Kolik Kč má Marie, kolik Dana a kolik Pavla?
s antisignálem	[HT2_9A3] Marie, Dana a Pavla mají dohromady 1 614 Kč. Pavla má o 216 Kč víc než Marie a o 150 Kč méně než Dana. Kolik Kč má Marie, kolik Dana a kolik Pavla?	[HT2_9A4] Marie, Dana a Pavla mají dohromady 1 614 Kč. Pavla má o 216 Kč víc než Marie a o 150 Kč méně než Dana. <i>Uvažují o společné koupi hry za 144 Kč.</i> Kolik Kč má Marie, kolik Dana a kolik Pavla?

Poslední možností je prozkoumat vliv tří parametrů u jedné úlohy (typ 1 + 3). U příkladu níže zjišťujeme rozdíl v obtížnosti mezi základní variantou HT1_3A1 a dvěma jejími

variantami, v nichž je vždy jiné číslo vyjádřeno číslicí, a ne slovem, a další variantou, která se od té základní liší délkou textu.

HT1_3A1 Lucka ujede při cyklistickém závodě za jednu hodinu *dvacet* kilometrů. Kačka ujede za stejnou dobu o *čtyři* kilometry méně. Kolik kilometrů ujede Kačka za *dvě* hodiny?

HT1_3A2 Lucka ujede při cyklistickém závodě za jednu hodinu *dvacet* kilometrů. Kačka ujede za stejnou dobu o *4* kilometry méně. Kolik kilometrů ujede Kačka za *dvě* hodiny?

HT1_3A3 Lucka ujede při cyklistickém závodě za jednu hodinu *20* kilometrů. Kačka ujede za stejnou dobu o *čtyři* kilometry méně. Kolik kilometrů ujede Kačka za *dvě* hodiny?

HT1_3A4 *Česká televize pořádá pravidelně pro děti cyklistické závody. Děti závodí po kategoriích od nejstarších po nejmladší.* Lucka ujede při cyklistickém závodě za jednu hodinu *dvacet* kilometrů. Kačka ujede za stejnou dobu o *čtyři* kilometry méně. Kolik kilometrů ujede Kačka za *dvě* hodiny?

Pro úlohy a jejich varianty používáme kódy, z nichž je vidět, v které vlně testování byly poprvé použity a o kterou z variant se jedná. Např. kód HT2_9A1 znamená, že úloha byla poprvé použita ve druhém testování, které značíme HT2, a byla to varianta 1 (první varianta) úlohy 9A. Zda byla použita ve stejné podobě i v jiné vlně testování, bude v následujících výkladech zřejmé z průvodního textu. Každá úloha má svůj unikátní kód a ten si drží ve všech testováních.⁴¹ Pro přehlednost popisu výsledků v kapitolách 5 až 13 dáváme úlohám i výstižné, zpravidla jednoslovné názvy (a přesný kód⁴² uvádíme v závorce), pomocí nichž lze zadání úloh jednoduše vyhledat v příloze 4.

Celkem se uskutečnilo šest vln testování. Při přípravě každé z nich bylo nejdříve rozhodnuto, které parametry budeme testovat a v jakých kombinacích. Zpočátku jsme u typu 2 + 2 kombinovali vždy jeden parametr jazykový a jeden matematický. U testování HT3 a pozdějších jsme se rozhodovali zejména na základě průběžných výsledků z předchozích testování s cílem získat spolehlivé výsledky, co se týče velikosti výzkumného vzorku. Zatímco v počátečních testováních jsme se drželi velmi přísných kritérií a varianty úloh musely odpovídat i počtem slov, později jsme toto kritérium uvolnili, neboť se v první vlně testování ukázalo, že délka textu v určitém rozsahu nemá takový vliv na obtížnost slovní úlohy, který jsme předpokládali (viz kap. 6).

Bylo také nutno rozhodnout, do kterého ročníku úlohu zařadit, případně zda ji zařadit do několika ročníků a v jaké podobě. Každou úlohu jsme ještě museli posoudit v kontextu ostatních úloh. Např. jsme ověřovali, zda se v příslušném testu neobjevily úlohy, které jsou všechny příliš dlouhé, či zda nemají hodně blízké kontexty apod. Tvorba testu a testových sešitů je blíže popsána v oddíle 3.5.

Nakonec jsme většinu úloh pilotně testovali. Zpravidla jsme je zadali písemně jedné či dvěma třídám mimo zapojené školy a provedli malý počet rozhovorů s žáky. Tím se nám podařilo zadání úloh doladit, ověřili jsme si, že žáci zadání rozumí a že úlohy nevedou k nepředvídaným asociacím či k nějakým námi nepředpokládaným chybám.

⁴¹I při relativně drobné změně se číselný kód mění. Např. pokud byla úloha použitá v HT1 v nějaké podobě (a měla tedy kód začínající HT1_) a v HT2 k ní byla jen dodána výzva *Vysvětlete*, pak dostává nový kód začínající HT1_2_.

⁴²Tam, kde nebude hrozit záměna, budeme vynechávat první část kódu (např. místo HT1_9A1 budeme psát 9A1).

Metodologie

V této kapitole nejdříve popíšeme výběr škol a soubor testovaných žáků a rámcově nastíníme strategii sběru dat, kterou v dalších oddílech podrobněji rozebereme. Zvláštní oddíly budou věnovány vstupnímu testování a přípravě i realizaci hlavních testování, v jejichž rámci byly žákům zadávány slovní úlohy. Podrobně bude popsána tvorba testových sešitů i jejich přidělování konkrétním žákům. Velkou část kapitoly tvoří detailní popis použitých metod IRT a statistických analýz. Kapitola uzavírá pojednání o sběru kvalitativně zpracovávaných dat – rozhovorů s žáky a následků na hodinách matematiky a českého jazyka.

3.1 Výběr a popis škol

Školy byly účelově vybrány na základě zpráv ČŠI, webových stránek škol a zejména jejich výročních zpráv tak, aby splňovaly následující kritéria: středně velké až velké školy, z oblasti širší Prahy, s převažující docházkou žáků ze spádových oblastí, s procentem žáků s jiným mateřským jazykem, které nepřevyšovalo celostátní průměr, s dostatečně pestrým socioekonomickým rodinným zázemím žáků. Podmínkou bylo zapojení v ideálním případě všech paralelních tříd od 3. do 9. ročníku. Potřebovali jsme součinnost nejen vedení školy, ale také učitelů 1. stupně a učitelů matematiky a českého jazyka (zejména pro motivaci žáků k účasti na testování). Nutností bylo také zapojení minimálně jednoho koordinátora testování z řad učitelů. Škola musela zajistit informovanost rodičů.

V první fázi projektu se podařilo získat ke spolupráci čtyři školy (A až D), ve druhé fázi byly přibrány ještě dvě další školy (E a F). Zatímco škola E otevírala na 2. stupni třídy zaměřené na matematiku a přírodovědné předměty, škola F měla třídy i pro žáky ohrožené školním neúspěchem. Podstatné charakteristiky všech šesti škol jsou v tab. 3.1; školy jsme anonymizovali. Testování se účastnily všechny třídy ročníku, jen ve škole F se neúčastnila jedna třída ze 3., 4. a 5. ročníku, a to z logistických důvodů, neboť tyto třídy byly umístěny na odlučeném pracovišti školy.

3.2 Rámcová strategie sběru dat

Sběr dat probíhal v několika vlnách. Od září 2016 byly do výzkumu zapojeny třídy škol A až D od 3. do 9. ročníku. Od září 2017 byli přibráni žáci škol E a F, opět počínaje 3. ročníkem. Soubor testovaných žáků jsme navýšili jednak proto, abychom zvětšili pravděpodobnost identifikace statisticky významných rozdílů u některých dvojic variant úloh, a jednak proto, abychom dotestovali vliv některých parametrů, které se v průběhu testování nově projeví jako klíčové.

Na počátku výzkumu byly žákům zadány dva vstupní testy prověřující vždy učivo předcházejícího ročníku – z matematiky a z českého jazyka (ve 3. ročníku byl zadán pouze test z matematiky, protože v předcházejícím 2. ročníku je učivo českého jazyka teprve v počátcích), jejichž výsledky posloužily k rozřazení žáků do výkonnostně srovnatelných skupin. Současně byly shromážděny některé údaje, které mohly mít vliv na testové výsledky: prospěch, pohlaví, speciální vzdělávací potřeby a informace, zda se jedná o žáka cizince.

Tab. 3.1: Přehled a charakteristika škol zapojených do projektu

škola	A	B	C	D
počet žáků	900–1 000	800–900	500–600	500–600
umístění školy	Praha 4, sídlíště	Praha 5, sídlíště	Praha 3, stará zástavba	Praha 8, sídlíště
speciální třídy	bilingvní (3 třídy ze 6 v ročníku, nebo 2 třídy z 5, nebo 2 třídy ze 4, či 1 ze 3)	žádné	1 třída v ročníku na 2. stupni se zaměřením na atletiku	žádné
počet hodin	ČJ/M 1. stupeň	39/22 bilingvní: 35/18 (+2 v AJ)	41/24	40/24
	ČJ/M 2. stupeň	17/16 bilingvní: 16/16	16/16	18/18
škola	E	F		
počet žáků	700–800	400–500		
umístění školy	Praha 6, sídlíště	Praha 3, stará zástavba		
speciální třídy	jedna třída v ročníku na 2. stupni s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů	jedna třída ročníku jako tzv. mikrotřída pro integrované žáky s poruchami učení		
počet hodin	ČJ/M 1. stupeň	43/23	42/24	
	ČJ/M 2. stupeň	18,5/18,5 speciální: 17,5/23,5	19/18	

Vstupní testy byly doplněny žákovským dotazníkem, který měl napříč jednotlivými ročníky obdobnou strukturu zahrnující následující bloky: (1) obliba matematiky a pocit kompetence v ní, případně v dílčím učivu; (2) vybrané aspekty výuky matematiky (domácí úkoly, frekvence známkování aj.); (3) čtenářské dovednosti (obliba čtení, počet přečtených knih, porozumění čtenému); (4) zkušenosti s oblastmi reálného života a jejich vztah ke slovním úlohám (zvládnutí práce s mapou, představa reálného problému aj.); (5) význam matematiky pro rodiče. Celkem dotazník obsahoval 20 položek (v případě 3. ročníku pouze 12), přičemž jejich znění se ve většině případů shodovalo tak, aby bylo možné ve výsledcích sledovat vývoj podle věku žáků.

Dotazník byl pilotován na skupině 8 žáků. Finální verze dotazníku byla použita jako součást vstupního testování škol A až D ve školním roce 2016/2017. V následujícím školním roce byly do projektu nově zařazeny školy E a F, jejichž žáci museli projít vstupním testováním, ale již nevyplňovali dotazníky.

Hlavní testování probíhalo v šesti vlnách značených HT1 až HT6 (viz tab. 3.2).

Vedle hlavního testování byla provedena také doplňková studie, která se týkala zjišťování atraktivity a obtížnosti slovních úloh generovaných samými žáky, a to ve 3. a 7. ročníku. Podrobněji je studie představena v oddíle 5.3.1.