INTEGRÁLY

pro nematematické obory VŠ

Jaroslava Justová

e-kniha

MATIK

INTEGRÁLY

pro nematematické obory VŠ

RNDr. Jaroslava Justová

Matik Liberec

E-knihu vydal:
Matik Liberec
Vydání první, 2022

ISBN 978-80-87711-08-8

Úvodem

Tato učebnice se věnuje základům integrálního počtu funkce jedné reálné proměnné, který je nedílnou součástí matematické analýzy. Bez něj se neobejdeme při studiu nejen mnoha dalších partií matematiky, ale i fyziky, mechaniky, ekonomie a jiných oborů. Neurčitými i určitými integrály se text zabývá přibližně v rozsahu látky, která se obvykle přednáší v prvním ročníku nematematických oborů vysokých škol. Mohou ji ale využívat i studenti přírodovědných gymnázií a snad potěší i další zájemce o matematiku.

Text je zaměřen na srozumitelné podání učiva a na důkladné vysvětlení postupů při výpočtu integrálů v různých typech úloh. V každé kapitole je nejprve uveden stručný přehled teorietických poznatků, po něm následuje dostatek řešených příkladů s podrobným vysvětlením postupu výpočtu a další úlohy pro samostatné procvičování. K úspěšnému zvládnutí látky se předpokládá znalost teorie reálných funkcí a základů diferenciálního počtu jedné reálné proměnné. (Množnými integrály se v této publikaci nezabýváme.)

Mou snahou bylo nabídnout studentům základní přehled o integrálech a metodách jejich výpočtu a poskytnout jim soubor řešených úloh vhodných pro přípravu na semináře a písemné testy. Případní zájemci o podrobnější výklad teorie s důkazy vět (které zde jsou vzhledem k účelu textu uváděny jen minimálně) či o výpočet náročnějších příkladů jistě najdou další učebnice a skripta k tomuto tématu.

Text vznikl na základě mých přednášek a seminářů na Technické univerzitě v Liberci. Praktická forma e-knihy umožňuje mít ji stále při ruce – v mobilu, v tabletu, ve čtečce či na počítači.

Věřím, že tato učebnice přispěje k lepšímu porozumění probírané látky a ke snazšímu zvládnutí Vašeho studia.

autorka

Obsah

1. Primitivní funkce a neurčitý integrál

V celém dalším textu budeme funkcí f rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné. Budeme používat pojmy definiční obor funkce, obor hodnot, limita funkce a první derivace funkce s označením f'.

V rámci diferenciálního počtu se k funkci f dané na intervalu I zjišťuje její derivace. Nyní si ale představme úlohu opačnou: Víme, že zadaná funkce f je derivací určité „výchozí" funkce, a právě tuto výchozí funkci chceme nějakým způsobem zjistit. U některých jednodušších funkcí můžeme takovou funkci určit přímo, ze znalosti derivací, ale obecně je potřeba ji vhodným způsobem vypočítat.

Postupy, které nám k tomu slouží, se souhrnně nazývají *integrace, integrování* a tato hledaná „výchozí" funkce se nazývá funkce *primitivní*. Obvykle se značí velkým písmenem, které odpovídá označení funkce zadané.

Definice 1.1. *Primitivní funkcí k funkci f na intervalu $I = (a, b)$, $a, b \in R^*$, nazveme funkci F, pro kterou platí:*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Primitivní funkce je na I spojitá, neboť zde existuje její derivace. Jestliže má funkce f na intervalu I primitivní funkci, má těchto funkcí nekonečně mnoho. Máme-li např. konstantní funkci $f(x) = 5$, definovanou na R, ze vzorců pro derivace ihned víme, že její primitivní funkcí bude funkce

$$F(x) = 5x, \text{ protože } (5x)' = 5 \quad \forall x \in R.$$

Ale i další funkce splňují uvedenou definici, např.:

$$F_1(x) = 5x + 2, \text{ protože } (5x + 2)' = 5 \quad \forall x \in R,$$
$$F_2(x) = 5x - 18{,}3\ , \text{ protože } (5x - 18{,}3)' = 5 \quad \forall x \in R \text{ atd.}$$

Platí tedy následující věta:

Věta 1.1. *Má-li funkce f na intervalu I primitivní funkci, pak má na I primitivních funkcí nekonečně mnoho. Všechny primitivní funkce k f se navzájem liší o konstantu $c \in R$.*

Důkazy tvrzení v této učebnici zpravidla uvádět nebudeme, ale zde na ukázku jednoduchý důkaz provedeme.

Důkaz Věty 1.1: Je-li F primitivní funkcí k f na intervalu I, pak pro všechna $c \in R$ je také funkce $G = F + c$ primitivní funkcí k f na I, protože

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I.$$

Mějme dále F_1 a F_2 dvě libovolné primitivní funkce k funkci f na intervalu I. Pak pro derivaci jejich rozdílu platí:

$$(F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Tedy $F_1 - F_2$ je na I konstantní funkce, tj. $F_1 - F_2 = c, c \in R$.

konec důkazu

Definice 1.2. *Neurčitým integrálem funkce f na intervalu I nazveme souhrn všech primitivních funkcí k funkci f na tomto intervalu.*

Pro zápis neurčitého integrálu budeme používat označení $\int f(x)\,dx$ (příp. zjednodušené $\int f$), kde za znakem pro integrál následuje integrovaná funkce (tzv. integrand) a dále symbol dx, který uvádí označení integrační proměnné (tj. proměnné, podle které se integruje). Symbol dx je zde součástí znaku integrálu a nemá přímý význam diferenciálu. Výsledek neurčitého integrálu se obvykle zapisuje včetně integrační konstanty:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c.$$

Poznámky:

a) Neurčitý integrál jsme definovali jako souhrn primitivních funkcí (tj. množinu funkcí), ale při výpočtech s ním běžně pracujeme jako s jednou funkcí. Proto se v některých učebnicích neurčitým integrálem přímo nazývá každá primitivní funkce.

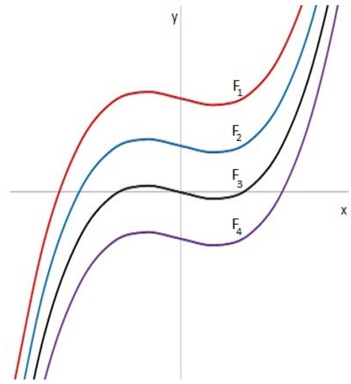
b) V neurčitém integrálu může být vždy pouze jedna integrační proměnná, na jejím označení však nezáleží: $\int f(x)\,dx$, $\int f(t)\,dt$, $\int f(s)\,ds$.

c) Z významu derivování a integrování plyne, že jsou to postupy vzájemně opačné. Pro každé x z oboru integrace I tedy platí:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x), \qquad \int f'(x)\,dx = f(x) + c.$$

Proto zkoušku správnosti výpočtu můžeme vždy provést zpětným zderivováním výsledné primitivní funkce, čímž získáme (po případných úpravách) původní integrovanou funkci.

d) Každá primitivní funkce je spojitá na I. Grafy všech primitivních funkcí k dané funkci f jsou křivky stejného typu, posunuté ve směru osy y o konstantu $c \in R$ (viz Obr. 1.1).



Obrázek 1.1: Grafy primitivních funkcí

e) Všechny primitivní funkce k zadané funkci f se navzájem liší o konstantu, ne vždy je však tato konstanta zřejmá. Např. k funkci $f(x) = \frac{1}{x}$ je na intervalu $I = (0, \infty)$ primitivní funkcí funkce $F(x) = \ln x$ i funkce $F_1(x) = \ln 2x$, neboť $(\ln 2x)' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$, a tedy funkce F_1 splňuje definici primitivní funkce na I také. Konstantu, o kterou se obě funkce liší, zjistíme úpravou logaritmu: $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$ a hledaná konstanta je $c = \ln 2$.

f) Primitivní funkce k funkci f se za určitých předpokladů někdy zavádí i na uzavřeném intervalu I (v krajních bodech se pak definovaný vztah uvažuje pro příslušné jednostranné derivace). My však budeme hledat primitivní funkci vždy na otevřeném intervalu, podle Definice 1.1.

Základními větami pro neurčitý integrál jsou následující dvě věty:

Věta 1.2. (o existenci primitivní funkce) *Je-li funkce f spojitá na intervalu I, pak k ní na I existuje primitivní funkce F (a tedy i neurčitý integrál).*

Na základě věty 1.2 určujeme obor integrace jako maximální otevřený interval, na němž je funkce f spojitá. Je zřejmé, že funkce může být integrovatelná na více intervalech, např. funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je integrovatelná na $I_1 = (-\infty, 0)$ i na $I_2 = (0, \infty)$ (ale ne na jejich sjednocení!).

Bez předpokladu spojitosti funkce f na intervalu I se neobejdeme, což ukazuje i následující příklad.

Příklad 1.1.

Je dána funkce f, $f(x) = 2x$ pro $x \in R \setminus \{0\}$ a $f(0) = 1$. Zjistěte, zda má takto definovaná nespojitá funkce primitivní funkci.

Řešení: Funkce f je definována ve všech bodech $x \in R$, ale je v bodě 0 nespojitá. Kdyby k ní existovala primitivní funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$, byla by to funkce $F(x) = x^2 + c$. Z důvodu spojitosti primitivní funkce by ale F v bodě 0 musela být dodefinována hodnotou $F(0) = c$. Pak by tedy platilo $F'(x) = 2x \; \forall x \in R$ a $F'(0) = 0$, jenomže zároveň by mělo být $F'(0) = f(0) = 1$. K zadané funkci f tedy žádná primitivní funkce neexistuje.

Věta 1.3. (o linearitě) *Existují-li na intervalu I neurčité integrály funkcí f a g a dále $c \in R$, pak na intervalu I platí:*

$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,, \\ \int (c\,f(x))\,dx &= c \int f(x)\,dx\,. \end{aligned}$$

Obě uvedené vlastnosti se souhrnně nazývají *linearita neurčitého integrálu* a lze je také zapsat ve tvaru

$$\int (cf(x) + dg(x))\,dx = c\int f(x)\,dx + d\int g(x)\,dx \qquad c, d \in R.$$

Větu o linearitě lze zobecnit pro součet konečného počtu funkcí. Zdůrazněme ještě, že ji nelze použít obráceně, tj. že z existence integrálu ze součtu dvou funkcí neplyne existence integrálu každé z těchto funkcí. Např. pro součet $\frac{x+2}{x} - \frac{2}{x} = 1$ integrál $\int 1\,dx$ existuje na R, ale $\int \frac{x+2}{x}\,dx$ ani $\int \frac{2}{x}\,dx$ na R neexistují.

Základní vzorce

Základní vztahy pro neurčité integrály získáme přímo ze vzorců pro derivace, protože integrování je zpětným postupem k derivování. Jejich přehled je v Tabulce 1.1. K jediné změně od vzorců pro derivace dochází u integrálu

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c,$$

neboť integrovaná funkce má dle Věty 1.2 primitivní funkci nejen na intervalu $(0, \infty)$, ale i na intervalu $(-\infty, 0)$. Uvedený vztah snadno ověříme zderivováním:

na $(0, \infty)$ platí: $\ln|x| = \ln x$ a $(\ln(x) + c)' = \frac{1}{x}$,
na $(-\infty, 0)$ platí: $\ln|x| = \ln(-x)$ a $(\ln(-x) + c)' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Uvedený vztah tedy vyjadřuje primitivní funkci pro oba intervaly.

Jako obory integrace jsou v Tabulce 1.1 uvedeny maximální intervaly, na nichž je funkce integrovatelná, příp. body, které nesmějí být v intervalu obsažené. Například pro $\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$ je oborem integrace každý interval, který neobsahuje body $x = k\pi,\ k \in Z$.

Primitivní funkce	**Obor integrace**
$\int 0\, dx = c$	R
$\int 1\, dx = x + c$	R
$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ pro $n \neq -1,\ n \in R$	podle D(f)
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$	$x \neq 0$
$\int e^x\, dx = e^x + c$	R
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ pro $a \neq 1,\ a > 0$	R
$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$	R
$\int \cos x\, dx = \sin x + c$	R
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \mathrm{tg}\, x + c$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\mathrm{cotg}\, x + c$	$x \neq k\pi, k \in Z$
$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg}\, x + c = -\mathrm{arccotg}\, x + c$	R
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + c = -\arccos x + c$	$(-1, 1)$

Tabulka 1.1: Základní vzorce pro integraci