

TEORIE PRAVDĚPODOBNOTI

Petr Lachout

KAROLINUM

Teorie pravděpodobnosti

Petr Lachout



**Národní
plán
obnovy**



**Financováno
Evropskou unií**
NextGenerationEU



Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2022
Třetí vydání

© Univerzita Karlova, 2022

© Petr Lachout, 2022

ISBN 978-80-246-5399-0

ISBN 978-80-246-5430-0 online : pdf



Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Předmluva

Tento text byl napsán jako skripta Univerzity Karlovy v Praze k přednášce *STP 050 Teorie pravděpodobnosti*, která je přednášena na Matematicko-fyzikální fakultě.

Učební látku v rozsahu uvedené přednášky obsahují kapitoly 1 až 18. Na ně navazuje kapitola 19 shrnující různé způsoby charakterizace rozdělení náhodné veličiny a kapitola 20, která připomíná některá klasická rozdělení pravděpodobnosti. K textu přednášky je připojen stručný přehled matematického aparátu, který je v přednášce používán, kapitola 23, seznam použité literatury, kapitola 24, a příklady, kapitola 25.

Text je dále rozšířen o kapitolu 21 o lokálních limitních větách, které mají široké uplatnění ve fyzice, a o kapitolu 22, obsahující důkaz Prochorovovy věty. Tyto kapitoly nejsou sice součástí výkladu přednášky ale jsou zařazeny do skript pro zúplnění jejich obsahu. Navíc technika, zde použitá, bývá předpokládána v pokročilejších kurzech teorie pravděpodobnosti.

Petr Lachout

Obsah

1. Axiomatická definice pravděpodobnosti	7
2. Měřitelnost kolekce náhodných veličin	9
3. Distribuční funkce	11
4. Nezávislost	19
5. Střední hodnota reálné náhodné veličiny	23
6. Různé typy konvergenzí posloupnosti náhodných veličin	32
7. Podmiňování	40
8. Náhodná pravděpodobnostní míra	54
9. Podmíněné rozdělení	58
10. 0–1 zákony	63
11. Sčitatelnost řady reálných náhodných veličin	67
12. Silné zákony velkých čísel	70
13. Slabá konvergence pravděpodobnostních měr	73
14. Konvergence v distribuci	78
15. Charakteristické funkce	83
16. Inverzní formule pro charakteristickou funkci	93
17. Limitní věty	98
18. Berryova–Esseenova nerovnost	113
19. Charakterizace rozdělení náhodných veličin	115
20. Klasická rozdělení pravděpodobnosti	118
21. Lokální limitní věty	120
22. Důkaz Prochorovovy věty	123
23. Dodatky	127
A. Množinové systémy a měřitelné prostory	127
B. Topologické prostory	129
C. Metrické prostory	130
D. Teorie míry	132
E. Různé	135
24. Seznam literatury	136
25. Cvičení k vyložené teorii	137

Použité značení

\mathbb{N} ... přirozená čísla,
 \mathbb{N}_0 ... přirozená čísla s nulou,
 \mathbb{Q} ... racionální čísla,
 \mathbb{Z} ... celá čísla,
 \mathbb{R} ... reálná přímka,
 \mathbb{R}_+ ... nezáporná reálná čísla,
 $\overline{\mathbb{R}}$... rozšířená reálná přímka,
 \mathbb{C} ... komplexní čísla,
 \mathbb{B} ... borelovská σ -algebra reálné přímky,
 \mathbb{B}^k ... borelovská σ -algebra \mathbb{R}^k ,
 $\overline{\mathbb{B}}$... borelovská σ -algebra rozšířené reálné přímky,
 $\mathbb{B}(E)$... borelovská σ -algebra metrického prostoru E ,
 $\mathcal{G}(E)$... množina všech otevřených množin metrického prostoru E ,
 $\mathcal{F}(E)$... množina všech uzavřených množin metrického prostoru E ,
 $\mathcal{K}(E)$... množina všech kompaktních množin metrického prostoru E ,
 \mathbb{I}_A ... identifikátor množiny, jevu,
 Id_E ... identita na množině E ,
 $\text{clo}(A)$... uzávěr množiny A ,
 $\text{int}(A)$... vnitřek množiny A ,
 $\partial(A)$... hranice množiny A ,
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$... označuje skalární součin vektorů v \mathbb{R}^k ,
 $|\cdot|$... absolutní hodnota,
 $\|\cdot\|$... euklidovská délka vektoru v \mathbb{R}^k ,
 x', A' ... transpozice vektoru, matice.

1. Axiomatická definice pravděpodobnosti

Teorie pravděpodobnosti se zabývá studiem náhodných jevů a jejich limitním chováním. Vytváří tak nástroje pro matematickou statistiku, ekonometrii a ostatní vědní obory, které zpracovávají empirická data a řeší praktické problémy a úlohy. Abychom mohli popisovat nejen konkrétní náhodný pokus, ale též i jeho limitní chování, zavádíme následující pojem pravděpodobnostního prostoru.

Definice 1.1 (A.N. Kolmogorov 1933): *Trojici (Ω, \mathcal{A}, P) nazýváme pravděpodobnostní prostor, jestliže Ω je neprázdná množina, $\mathcal{A} \subset 2^\Omega$ je σ -algebra a P je míra na \mathcal{A} , $P(\Omega) = 1$.*

Standardní terminologie: $\omega \in \Omega$ - elementární jev, $A \in \mathcal{A}$ - náhodný jev, P - pravděpodobnostní míra, $P(A)$ - pravděpodobnost náhodného jevu A , \emptyset - nemožný jev, Ω - jistý jev.

Říkáme, že dva náhodné jevy A, B jsou neslučitelné, když $A \cap B = \emptyset$.

Pro praktické účely jsou důležité dva základní typy pravděpodobnostních prostorů.

Příklad 1.2: Množina Ω je nejvýše spočetná. Zde není problému s volbou σ -algebry \mathcal{A} . Volíme ji přímo jako $\mathcal{A} = 2^\Omega$. Pravděpodobnostní míra P je pak určena pravděpodobnostmi elementárních jevů, tj.

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \text{ pro každé } A \in \mathcal{A},$$

kde $0 \leq p(\omega) \leq 1$ pro $\omega \in \Omega$ a $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Takový pravděpodobnostní prostor nazýváme diskrétním pravděpodobnostním prostorem.

△

Příklad 1.3: $\Omega \in \mathbb{B}^k$, $\mathcal{A} = \mathbb{B}^k \cap \Omega = \{A \in \mathbb{B}^k : A \subset \Omega\}$ a pravděpodobnostní míra P je generována hustotou pravděpodobnosti $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, tj. $f \geq 0$ je lebesgueovskými integrovatelná funkce a $\int_{\Omega} f(\omega) d\omega = 1$, předpisem

$$P(A) = \int_A f(\omega) d\omega \text{ pro každé } A \in \mathcal{A}.$$

Takový pravděpodobnostní prostor nazýváme spojitým pravděpodobnostním prostorem.

△

Pravděpodobnostní prostor je vlastně pouze pomocný objekt. Naše znalosti a pozorování modelujeme pomocí náhodných veličin.

Definice 1.4: *Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a (E, \mathcal{E}) je měřitelný prostor. Budeme říkat, že zobrazení $X : \Omega \rightarrow E$ je náhodná veličina (dále jen n.v.) s hodnotami v (E, \mathcal{E}) , jestliže je měřitelná, tj.*

$$[X \in B] := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}B \in \mathcal{A} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Tento fakt budeme vyznačovat zápisem $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$.

Definice 1.5: *Je-li X n.v. s hodnotami v (E, \mathcal{E}) , pak zavádíme pojem rozdělení (pravděpodobnosti) n.v. X jako pravděpodobnostní míru P_X definovanou na \mathcal{E} předpisem $P_X(B) = P(X \in B) := P([X \in B])$ pro $B \in \mathcal{E}$.*

Jiné používané značení je $P_X = \mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X | P)$.

Lemma 1.6: *Když X je n.v. s hodnotami v (E, \mathcal{E}) , pak (E, \mathcal{E}, P_X) je pravděpodobnostní prostor.*

Důkaz lemmatu je ponechán na čtenáři.

Úmluva 1.7: Pro n.v. X s hodnotami v (E, \mathcal{E}) zavedeme následující terminologii:

- i) Je-li $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P}_X)$ diskrétní pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že n.v. X má diskrétní rozdělení.
- ii) Je-li $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P}_X)$ spojitý pravděpodobnostní prostor, pak říkáme, že n.v. X má spojité rozdělení.
(Musí být $E \in \mathbb{B}^k$ a $\mathcal{E} = \mathbb{B}^k \cap E$.)
- iii) Budeme říkat, že $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ je (k -rozměrný) náhodný vektor, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\prod_{i=1}^k E_i, \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{E}_i \right)$.
- iv) Budeme říkat, že $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ je náhodná posloupnost, je-li n.v. s hodnotami v $\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, \bigotimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_i \right)$.
- v) Budeme říkat, že $X = (X_t, t \in T)$ je náhodný proces indexovaný T , je-li n.v. s hodnotami v $\left(\prod_{t \in T} E_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t \right)$.
- vi) Budeme říkat, že X je reálná n.v., je-li n.v. s hodnotami v (\mathbb{R}, \mathbb{B}) .
- vii) Budeme říkat, že $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ je (k -rozměrný) reálný náhodný vektor, je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}^k)$ pro nějaké přirozené číslo k .
- viii) Budeme říkat, že $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ je reálná náhodná posloupnost, je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathbb{B}^{\mathbb{N}})$.
- ix) Budeme říkat, že $X = (X_t, t \in T)$ je reálný náhodný proces indexovaný T , je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{R}^T, \mathbb{B}^T)$.
- x) Budeme říkat, že X je zobecněná reálná n.v., je-li n.v. s hodnotami v $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathbb{B}})$.
- xi) Budeme říkat, že X je komplexní n.v., je-li n.v. s hodnotami v $(\mathbb{C}, \mathbb{B}(\mathbb{C}))$.

V úmluvě používáme součinnové σ -algebry. Definice tohoto součinu je uvedena v dodatcích jako A.10.

Každá n.v. má své rozdělení pravděpodobnosti. Můžeme se ptát, zda ke každé pravděpodobnostní míře existuje n.v., která ji má jako své rozdělení. Odpověď je kladná.

Věta 1.8: Nechť (E, \mathcal{E}, μ) je pravděpodobnostní prostor. Potom existuje n.v. X taková, že její rozdělení je $\mathbb{P}_X = \mu$.

Důkaz: Položme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (E, \mathcal{E}, \mu)$ a $X = \text{Id}_E$.

Pro $B \in \mathcal{E}$ dostáváme $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(B) = \mu(B)$.

Q.E.D.

Konstrukce použitá v důkazu věty se nazývá kanonická konstrukce n.v.

Rozdělení pravděpodobnosti často se vyskytující v praxi mají své ustálené názvy, viz kapitola 20.

2. Měřitelnost kolekce náhodných veličin

Sdružíme-li indexované náhodné veličiny, automaticky dostáváme náhodný proces.

Věta 2.1: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor, $T \neq \emptyset$ a necht' pro $t \in T$ jsou $E_t = (E_t, \mathcal{E}_t)$ měřitelné prostory. Když $X_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_t, \mathcal{E}_t)$ jsou n.v. pro každé $t \in T$, potom $(X_t, t \in T)$ je náhodný proces s hodnotami v $\left(\prod_{t \in T} E_t, \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t \right)$.

Důkaz: Potřebujeme ověřit správnou měřitelnost kolekce n.v. $(X_t, t \in T)$. Definujme proto množinu

$$\mathcal{M} = \left\{ B \in \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t : [(X_t, t \in T) \in B] \in \mathcal{A} \right\}.$$

1. Ověříme, že \mathcal{M} je σ -algebra.

(a) $\prod_{t \in T} E_t \in \mathcal{M}$, protože $[(X_t, t \in T) \in \prod_{t \in T} E_t] = \Omega \in \mathcal{A}$.

(b) Když $A \in \mathcal{M}$, potom $[(X_t, t \in T) \in \prod_{t \in T} E_t \setminus A] = \Omega \setminus [(X_t, t \in T) \in A] \in \mathcal{A}$.

Proto také $\prod_{t \in T} E_t \setminus A \in \mathcal{M}$.

(c) Když $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$, potom platí

$$\left[(X_t, t \in T) \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [(X_t, t \in T) \in A_n] \in \mathcal{A}.$$

Proto také $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

2. Ukážeme, že \mathcal{M} obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky

Pro konečně indexů $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ a množiny $B_t \in \mathcal{E}_t$ pro každé $t \in T$ takové, že $B_t = E_t$ pokud $t \notin \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$, platí

$$\left[(X_t, t \in T) \in \prod_{t \in T} B_t \right] = \bigcap_{i=1}^k [X_{t_i} \in B_{t_i}] \in \mathcal{A}.$$

Tedy \mathcal{M} obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky.

Z definice součinu σ -algeber, viz A.10, vyplývá, že

$$\bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t = \sigma \left(\left\{ \prod_{t \in T} B_t : B_t \in \mathcal{E}_t \text{ pro každé } t \in T \text{ a } B_t = E_t \text{ až na konečně } t \in T \right\} \right) = \mathcal{M}.$$

Sledovaná kolekce n.v. je správně měřitelná.

Q.E.D.

Speciálně dostáváme měřitelnost náhodného vektoru a náhodné posloupnosti.

Věta 2.2: Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a $k \in \mathbb{N}$. Necht' pro $i = 1, 2, \dots, k$ jsou dány $E_i = (E_i, \mathcal{E}_i)$ měřitelné prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$ n.v. Potom $(X_1, X_2, \dots, X_k)'$ je náhodný vektor s hodnotami v $\left(\prod_{i=1}^k E_i, \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{E}_i \right)$.

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 2.1. Stačí položit $T := \{1, 2, \dots, k\}$.

Q.E.D.

Věta 2.3: Necht' $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a necht' pro každé $i \in \mathbb{N}$ jsou $E_i = (E_i, \mathcal{E}_i)$ měřitelné prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_i, \mathcal{E}_i)$ n.v. Potom $(X_i, i \in \mathbb{N})$ je náhodná posloupnost s hodnotami v $\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} E_i, \otimes_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_i \right)$.

Důkaz: Věta je speciálním případem věty 2.1. Stačí položit $T := \mathbb{N}$.

Q.E.D.

Později se budeme zajímat o asymptotické vlastnosti posloupnosti náhodných veličin a o různé typy konvergenčí. Budeme proto potřebovat topologickou strukturu na množině hodnot, které náhodné veličiny nabývají. Měřitelnost pak musíme vyžadovat vzhledem k borelovské σ -algebře součinného prostoru, která však je obecně podstatně větší než součin borelovských σ -algeber. Naštěstí pro separabilní metrické prostory je zaručena rovnost mezi těmito dvěma σ -algebry.

Věta 2.4: Necht' $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a pro $i = 1, 2, \dots, k$ jsou $E_i = (E_i, d_i)$ separabilní metrické prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_i, \mathbb{B}(E_i))$ n.v. Potom $(X_1, X_2, \dots, X_k)'$ je náhodný vektor s hodnotami v $\left(\prod_{i=1}^k E_i, \mathbb{B}\left(\prod_{i=1}^k E_i\right) \right)$ a $\mathbb{B}\left(\prod_{i=1}^k E_i\right) = \otimes_{i=1}^k \mathbb{B}(E_i)$.

Důkaz: Přímý důsledek věty 2.2 a věty C.13 z dodatků.

Q.E.D.

Věta 2.5: Necht' $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ je pravděpodobnostní prostor a pro $i \in \mathbb{N}$ jsou $E_i = (E_i, d_i)$ separabilní metrické prostory a $X_i : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E_i, \mathbb{B}(E_i))$ n.v. Potom $(X_i, i \in \mathbb{N})$ je náhodná posloupnost s hodnotami v $\left(\prod_{i=1}^{+\infty} E_i, \mathbb{B}\left(\prod_{i=1}^{+\infty} E_i\right) \right)$ a $\mathbb{B}\left(\prod_{i=1}^{+\infty} E_i\right) = \otimes_{i=1}^{+\infty} \mathbb{B}(E_i)$.

Důkaz: Přímý důsledek věty 2.3 a věty C.13 z dodatků.

Q.E.D.

Pro bohatší indexové množiny se však již součinná a borelovská σ -algebra mohou podstatně lišit. Tvrzení proto obecně neplatí pro procesy.

Reálná přímka je separabilním metrickým prostorem. Proto reálné náhodné posloupnosti a vektory jsou borelovsky měřitelné, jakmile mají měřitelné složky.

3. Distribuční funkce

Ke stanovení rozdělení n.v. stačí znát pravděpodobnostní míru P pouze na speciální σ -algebře.

Definice 3.1: Nechť X je n.v. s hodnotami v (E, \mathcal{E}) definovaná na (Ω, \mathcal{A}, P) . Pak σ -algebrou $\sigma(X) = \{[X \in B] : B \in \mathcal{E}\}$ nazýváme σ -algebrou generovanou n.v. X .

Poznámka 3.2:

- i) $(\Omega, \sigma(X), P|_{\sigma(X)})$ je pravděpodobnostní prostor.
- ii) Pro náhodný vektor $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ platí $\sigma(X) = \sigma(\sigma(X_1) \cup \sigma(X_2) \cup \dots \cup \sigma(X_k))$.
- iii) Pro náhodnou posloupnost $X = (X_i, i \in \mathbb{N})$ platí $\sigma(X) = \sigma\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \sigma(X_i)\right)$.
- iv) Pro náhodný proces $X = (X_t, t \in T)$ platí $\sigma(X) = \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t)\right)$.

Důkaz:

1. Systém množin $\sigma(X)$ je evidentně σ -algebra, a proto $(\Omega, \sigma(X), P|_{\sigma(X)})$ tvoří pravděpodobnostní prostor.
2. Stačí ukázat charakterizaci σ -algebry generované procesem. Zbylá tvrzení jsou speciálním případem tohoto tvrzení.

Inkluze $\sigma(X) \supset \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t)\right)$ je zřejmá. Musíme ukázat pouze opačnou inkluzi.

Definujme množinu

$$\mathcal{M} = \left\{ B \in \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t : [X \in B] \in \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t)\right) \right\}.$$

Evidentně, \mathcal{M} je σ -algebra. Stačí ověřit, že obsahuje generátor součinnové σ -algebry.

Vezměme konečněrozměrné obdélníky $B = \prod_{t \in T} B_t$, kde $B_t \in \mathcal{E}_t$ pro každé $t \in T$ a $B_t \neq E_t$ pouze pro konečně $t \in T$. Označme tyto indexy t_1, t_2, \dots, t_n , kde n je jejich počet. Potom

$$[X \in B] = \bigcap_{i=1}^n [X_{t_i} \in B_{t_i}] \in \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t)\right).$$

Systém množin \mathcal{M} je σ -algebra, která obsahuje všechny konečněrozměrné obdélníky.

Proto $\mathcal{M} = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{E}_t = \mathcal{E}$ a z této rovnosti vyplývá, že $\sigma(X) \subset \sigma\left(\bigcup_{t \in T} \sigma(X_t)\right)$.

Q.E.D.

Příklad 3.3: Nechť n.v. X nabývá spočetně mnoha hodnot v (E, \mathcal{E}) , označme je $x_i, i \in \mathbb{N}$. Položíme-li $p_i = P(X = x_i), i \in \mathbb{N}$, pak X má rozdělení

$$P_X(B) = P(X \in B) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \mathbb{1}_{x_i \in B} \text{ pro každé } B \in \mathcal{E}.$$

Jinak řečeno

$$P_X = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i \varepsilon_{x_i}, \text{ kde } \varepsilon_y(B) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } y \in B, \\ 0 & \text{pokud } y \notin B. \end{cases}$$

N.v. X generuje σ -algebru

$$\sigma(X) = \sigma(\{[X = x_i] : i \in \mathbb{N}\}) = \left\{ \bigcup_{j \in J} [X = x_j] : J \subset \mathbb{N} \right\}.$$

△

Příklad 3.4: Necht' $X = (X_1, X_2)$ je reálný náhodný vektor se spojitým rozdělením a s hustotou $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pak platí

$$P_X(B) = \int_B f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \text{ pro všechna } B \in \mathbb{B}^2.$$

Spočtěme si marginální rozdělení, tj. rozdělení n.v. X_1 a X_2 . Vezměme $B \in \mathbb{B}$ a počítejme

$$\begin{aligned} P_{X_1}(B) &= P(X_1 \in B) = P((X_1, X_2) \in B \times \mathbb{R}) = P_X(B \times \mathbb{R}) = \\ &= \int_{B \times \mathbb{R}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_B \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1 \end{aligned}$$

podle Fubiniho věty, neboť $f \geq 0$. Tudíž n.v. X_1 má spojité rozdělení s hustotou

$$f_1(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy & \text{pokud integrál existuje a je konečný,} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a n.v. X_2 má spojité rozdělení s hustotou

$$f_2(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, x) dy & \text{pokud integrál existuje a je konečný,} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

A jak je to s generovanými σ -algebry?

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \{[X \in B] : B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a_1 < X_1 < b_1] \cap [a_2 < X_2 < b_2] : a_1 < b_1, a_2 < b_2\}) \\ &= \sigma(\{[X_1 < b_1] \cap [X_2 < b_2] : b_1, b_2 \in \mathbb{R}\}), \\ \sigma(X_1) &= \{[X_1 \in B] : B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a < X_1 < b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[X_1 < b] : b \in \mathbb{R}\}), \\ \sigma(X_2) &= \{[X_2 \in B] : B \in \mathbb{B}\} = \sigma(\{[a < X_2 < b] : a < b, a, b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[X_2 < b] : b \in \mathbb{R}\}). \end{aligned}$$

△

Rozdělení reálného náhodného vektoru lze charakterizovat pomocí jeho distribuční funkce.

Definice 3.5: Necht' $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ je reálný náhodný vektor. Pak definujeme funkci

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_k) := P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_k < x_k) = P_X \left(\bigtimes_{i=1}^k (-\infty, x_i) \right)$$

pro každé $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ a budeme ji nazývat distribuční funkce (dále d.f.) reálného náhodného vektoru X .

Věta 3.6: Rozdělení reálného náhodného vektoru je jednoznačně určeno jeho distribuční funkcí.

Důkaz: Necht' $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)'$ a $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)'$ jsou dva reálné náhodné vektory. Mají-li tyto vektory shodné rozdělení, pak přímo z definice vidíme, že se jejich d.f. shodují. Zbývá ukázat opačnou implikaci.

Předpokládejme, že $F_X = F_Y$ a označme $\mathcal{M} = \{B \in \mathbb{B}^k : P_X(B) = P_Y(B)\}$. Naším cílem je ukázat, že $\mathcal{M} = \mathbb{B}^k$.

Z rovnosti $F_X = F_Y$ vyplývá, že

$$S = \left\{ \bigcap_{i=1}^k (-\infty, b_i) : b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}.$$

Ještě ověříme, že \mathcal{M} je Dynkinův systém, definice je uvedena v dodatcích ve větě A.8.

1. $\mathbb{R}^k \in \mathcal{M}$, protože $P_X(\mathbb{R}^k) = P_Y(\mathbb{R}^k) = 1$.
2. Když $A, B \in \mathcal{M}$ a $A \supset B$ pak platí

$$P_X(A \setminus B) = P_X(A) - P_X(B) = P_Y(A) - P_Y(B) = P_Y(A \setminus B).$$

Potom $A \setminus B \in \mathcal{M}$.

3. Když $A_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$P_X\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_X(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_Y(A_n) = P_Y\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right).$$

Potom $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

S je uzavřeno na konečné průniky, a tak $\mathcal{M} \supset \sigma(S) = \mathbb{B}^k$ podle věty A.8.

Q.E.D.

Úmluva 3.7: Pro porovnávání dvou vektorů po složkách, případně složek vektoru a čísla, budeme používat symbolů $<$, $>$, \leq a \geq . Pro posloupnost vektorů $x^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ a vektor $x \in \mathbb{R}^k$ budeme jejich konvergenci po složkách označovat $x^n \rightarrow x$.

Distribuční funkce umíme jednoznačně charakterizovat.

Definice 3.8: Budeme říkat, že funkce $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ je DF_k -funkce, jestliže je splněno:

- i) Pro každé $x \in \mathbb{R}^k$ existuje posloupnost bodů $x^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ taková, že $x^n < x$, $x^n \rightarrow x$ a platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x^n) = F(x)$.
- ii) Existuje posloupnost bodů $\hat{x}^n \in \mathbb{R}^k$, $n \in \mathbb{N}$ takových, že $\hat{x}^n \rightarrow (+\infty, +\infty, \dots, +\infty)'$ a platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(\hat{x}^n) = 1$.
- iii) Pro každý index $i = 1, 2, \dots, k$ a každý bod $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)' \in \mathbb{R}^k$ platí

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k) = 0.$$

- iv) Pro každou dvojici vektorů $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)'$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_k)' \in \mathbb{R}^k$, $x < y$ platí

$$\sum_{\substack{\delta_1 \in \{x_1, y_1\} \\ \delta_2 \in \{x_2, y_2\} \\ \dots \\ \delta_k \in \{x_k, y_k\}}} (-1)^{\text{card}(\{i : \delta_i = x_i\})} F(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) \geq 0.$$

(význam podmínky je, že „míra“ obdélníku $[x, y) = \bigcap_{i=1}^k [x_i, y_i)$ je nezáporná.)

Nejdříve rozšíříme DF_k -funkci i pro hodnoty $+\infty$, $-\infty$ a budeme její pomocí „měřit“ obdélníky.

Definice 3.9: Pro každou funkci $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ definujeme funkci $\tilde{F} : \overline{\mathbb{R}}^k \rightarrow [0, 1]$ a množinovou funkci μ_F předpisem

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} \sup\{F(y) : y < x, y \in \mathbb{R}^k\} & \text{pokud } x > -\infty, \\ 0 & \text{v opačném případě,} \end{cases}$$

$$\mu_F \left(\prod_{i=1}^k [a_i, b_i) \right) = \sum_{\substack{\delta_1 \in \{x_1, y_1\} \\ \delta_2 \in \{x_2, y_2\} \\ \dots \\ \delta_k \in \{x_k, y_k\}}} (-1)^{\text{card}(\{i : \delta_i = a_i\})} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$$

pro každé $a, b, x \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $a < b$.

Funkce μ_F má následující důležitou vlastnost.

Lemma 3.10: Necht' $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$, $a, b \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $a < b$ a $a^j, b^j \in \overline{\mathbb{R}}$, $a^j < b^j$ pro $j = 1, 2, \dots, J$, $J \in \mathbb{N}$.

Když $\prod_{i=1}^k [a_i, b_i) = \bigcup_{j=1}^J \prod_{i=1}^k [a_i^j, b_i^j)$ a $\prod_{i=1}^k [a_i^j, b_i^j) \cap \prod_{i=1}^k [a_i^s, b_i^s) = \emptyset$ kdykoli $j \neq s$, potom

$$\mu_F \left(\prod_{i=1}^k [a_i, b_i) \right) = \sum_{j=1}^J \mu_F \left(\prod_{i=1}^k [a_i^j, b_i^j) \right).$$

Důkaz: Stačí si uvědomit, že pro „pravidelné“ dělení tvrzení platí. Pro každou souřadnici uvažujme dělení příslušného intervalu $a_i = \alpha_i^0 < \alpha_i^1 < \dots < \alpha_i^{n_i} = b_i$, pak platí

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \mu_F \left(\prod_{i=1}^k [\alpha_i^{j_i}, \alpha_i^{j_i+1}) \right) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\} \\ \delta_2 \in \{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\} \\ \dots \\ \delta_k \in \{\alpha_k^{j_k}, \alpha_k^{j_k+1}\}}} (-1)^{\text{card}(\{i : \delta_i = \alpha_i^{j_i}\})} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) = \\ &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\} \\ \delta_2 \in \{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\} \\ \dots \\ \delta_{k-1} \in \{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\}}} (-1)^{\text{card}(\{i \leq k-1 : \delta_i = \alpha_i^{j_i}\})} \times \\ & \times \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \left(\tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, \alpha_k^{j_k+1}) - \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, \alpha_k^{j_k}) \right) = \\ & \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\} \\ \delta_2 \in \{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\} \\ \dots \\ \delta_{k-1} \in \{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\}}} (-1)^{\text{card}(\{i \leq k-1 : \delta_i = \alpha_i^{j_i}\})} \times \\ & \times \left(\tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, b_k) - \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{k-1}, a_k) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \sum_{\substack{\delta_1 \in \{\alpha_1^{j_1}, \alpha_1^{j_1+1}\} \\ \delta_2 \in \{\alpha_2^{j_2}, \alpha_2^{j_2+1}\} \\ \vdots \\ \delta_{k-1} \in \{\alpha_{k-1}^{j_{k-1}}, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}+1}\} \\ \delta_k \in \{a_k, b_k\}}} (-1)^{\text{card}(\{i \leq k-1 : \delta_i = \alpha_i^{j_i}\}) + \mathbb{I}_{[\delta_k = a_k]}} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) = \\
& = \dots = \sum_{\substack{\delta_1 \in \{a_1, b_1\} \\ \delta_2 \in \{a_2, b_2\} \\ \vdots \\ \delta_k \in \{a_k, b_k\}}} (-1)^{\text{card}(\{i : \delta_i = a_i\})} \tilde{F}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k) = \mu_F \left(\bigtimes_{i=1}^k [a_i, b_i] \right).
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Je-li F DF_k -funkce, pak je \tilde{F} opravdu jejím rozšířením a má následující vlastnosti.

Věta 3.11: Když $F : \mathbb{R}^k \rightarrow [0, 1]$ je DF_k -funkce, pak pro \tilde{F} platí:

- i) Pro každé $x \in \mathbb{R}^k$ je $\tilde{F}(x) = F(x)$.
- ii) Pro každé $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x \leq y$ je $\tilde{F}(x) \leq \tilde{F}(y)$.
- iii) Pro každé $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$ je $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \leq x}} \tilde{F}(y) = \tilde{F}(x)$.
- iv) $\tilde{F}(+\infty, +\infty, \dots, +\infty) = 1$.
- v) Když $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$ a alespoň pro jeden index i je $x_i = -\infty$, potom $\tilde{F}(x) = 0$.
- vi) Je splněna limita

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \sup \left\{ \tilde{F}(y) : \min\{y_1, y_2, \dots, y_k\} \leq t, y \in \overline{\mathbb{R}}^k \right\} = 0.$$

- vii) Pro každé $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x < y$ je $\mu_F \left(\bigtimes_{i=1}^k [x_i, y_i] \right) \geq 0$.

Důkaz:

1. Ukážeme monotonii \tilde{F} , tj. vlastnost (ii).

Přímo z definice 3.9 plyne, že když $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^k$, $x \leq y$, potom $\tilde{F}(x) \leq \tilde{F}(y)$. Je to proto, že je buď levá strana nulová nebo že $\tilde{F}(y)$ je supremum přes větší množinu než $\tilde{F}(x)$.

2. Ukážeme spojitost „zdola“ funkce \tilde{F} , tj. vlastnost (iii).

Nechť $x \in \overline{\mathbb{R}}^k$.

Když $x_i = -\infty$ pro některé i , pak $\tilde{F}(x) = 0$. Z monotonie \tilde{F} ihned dostaneme $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \leq x}} \tilde{F}(y) = \tilde{F}(x)$.

Když $-\infty < x$, pak pro $\varepsilon > 0$ existuje z definice 3.9 bod $y \in \mathbb{R}^k$ takový, že $y < x$ a $F(y) > \tilde{F}(x) - \varepsilon$. Podle definice 3.9 a z monotonie funkce \tilde{F} dostáváme

$$\tilde{F}(x) \geq \limsup_{\substack{z \rightarrow x \\ z \leq x}} \tilde{F}(z) \geq \liminf_{\substack{z \rightarrow x \\ z \leq x}} \tilde{F}(z) \geq \tilde{F}(y) \geq F(y) > \tilde{F}(x) - \varepsilon.$$

Jelikož ε může být libovolně malé, je již vlastnost (iii) ověřena pro $-\infty < x$. Zbývá si jen uvědomit, že ve zbývajících případech je pravá i levá strana (iii) nulová přímo z definice 3.9 a rovnost je triviální.