PETR KŮRKA

PROSTORY A GEOMETRIE

OD EUKLEIDA K EINSTEINOVI

KAROLINUM

Prostory a geometrie
Od Eukleida k Einsteinovi

Petr Kůrka

Ivanu Chvatíkovi, který dovede klást znepokojující a neodbytné otázky.

Recenzovali:
prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.
doc. RNDr. Zbyněk Šír, Ph.D.

Financováno Evropskou unií
NextGenerationEU

Národní plán obnovy

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu Transformace pro VŠ na UK (reg.č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

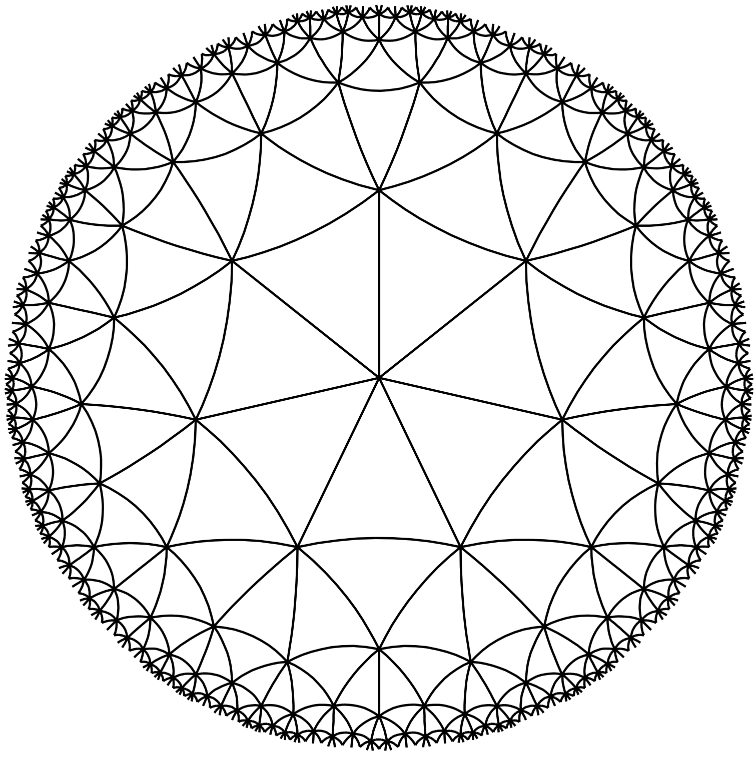
Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2023
Jazyková korektura Vendula Kadlečková
Grafická úprava Jan Šerých
Sazba Petr Kůrka
Vydání první

Na obálce je znázornění teselace hyperbolické roviny rovnostrannými trojúhelníky s úhly $2\pi/7$ (odstavec 9.5)

ISBN 978-80-246-5564-2
ISBN 978-80-246-5568-0 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz



Obsah

PŘEDMLUVA

V matematice opakovaně dochází k propojování různých, někdy i dost odlehlých oblastí, kdy se ze společných vlastností různých matematických struktur stávají definice obecnější a abstraktnější teorie, ve které teprve vynikne podstata popisovaných jevů.

V předkládané knize tento vývoj k obecnosti a k abstrakci sledujeme v geometrii. Úvodní kapitola je určitým pokusem o fenomenologii prostoru, ve kterém se pohybujeme a orientujeme. V další kapitole pojednáváme o Eukleidových *Základech*, které se svou axiomatickou výstavbou představují syntézu geometrického a logického myšlení. Zaměřujeme se na některé jejich partie, které v dalším vývoji geometrie sehrály významnou roli.

Sférická geometrie a trigonometrie se v antice považuje za součást astronomie a s geometrií eukleidovské roviny nemá nic společného. Ale novověcí geometři, kteří se pokoušeli dokázat pátý Eukleidův postulát, ji jako alternativu eukleidovské geometrie začali vnímat. A tak se stala jedním z inspiračních zdrojů neeukleidovských geometrií.

Projektivní geometrie vzniká jako odraz studií o perspektivě v renesančním malířství. Také ona je významným stupněm na cestě geometrické abstrakce. Abstrahuje totiž od měření délek a úhlů a zabývá se pouze vzájemnou polohou geometrických objektů. Proto se jí někdy říká geometrie polohy.

V rámci novověkého infinitesimálního počtu vznikla geometrie ploch Carla Friedricha Gausse (1778–1855). Na jejích klíčových pojmech metrického tenzoru, geodetiky a křivosti byla ve velké syntéze vybudována abstraktní diferenciální geometrie Bernharda Riemanna (1826–1866) a Tullio Levi-Civita (1873–1941) s klíčovými pojmy diferencovatelné variety, afinní konexe a tenzoru křivosti. A k dalšímu zobecnění dochází v geometrii obecné teorie relativity Alberta Einsteina (1879–1955).

Těmto tématům jsme se věnovali na geometrickém semináři, který probíhal v CTS[1] v letech 2021–2022. Za cenné podněty děkuji všem účastníkům semináře, jmenovitě Michalu Ajvazovi, Ivanu Chvatíkovi, Romanu Koteckému, Pavlu Krtoušovi, Janu Makovskému, Alexandru Matouškovi a Janu Zemanovi. Na Matematicko-fyzikální fakultě UK probíhal na podzim roku 2022 seminář o projektivní geometrii. Také jeho účastníci Štěpán Holub, Lukáš Krump a Zbyněk Šír svou kritikou přispěli k výsledné podobě knihy. Za cenné připomínky k předběžné verzi textu děkuji Peterovi Zamarovskému a oběma recenzentům Pavlu Krtoušovi a Zbyňku Šírovi. Za diskuze o filosofii matematiky vděčím Štěpánu Holubovi.

Kniha je určená zvídavým čtenářům se znalostmi středoškolské matematiky. Ta by měla postačovat pro porozumění prvním kapitolám o eukleidovské, neeukleidovské a projektivní geometrii. V dalších kapitolách matematická náročnost postupně roste. Kapitola o analytické geometrii projektivních prostorů je založena na abstraktní, ale nepříliš obtížné teorii vektorových prostorů. Následující kapitola o Gaussově teorii ploch již používá náročnější matematiku diferenciálního počtu. A v další kapitole o Riemannově diferenciální geometrii k tomu přistupuje vyšší úroveň matematické abstrakce. Používané teorie jsou sice vyloženy v kapitole o matematických strukturách, ale bez předběžných znalostí těchto témat se asi čtenář neobejde.

Předkládaná kniha volně navazuje a tvoří doplněk k naší knize (se spoluautorem Bedřichem Velickým) *Hermeneutika a metaforika čísel. Od počtů ke kvantové mechanice* [33]. Sleduje geometrii od jejích inspiračních zdrojů k vrcholným syntézám geometrického myšlení. Přeji čtenáři radost při odhalování poutavého příběhu geometrie, její podmanivosti a krásy.

Praha, leden 2023

Petr Kůrka

[1] Centrum pro teoretická studia, společné pracoviště Univerzity Karlovy v Praze a Akademie věd České republiky.

Kapitola 1

Fenomén prostoru

Prostředí, ve kterém žijeme, je bohatě strukturováno. Je v něm mnoho věcí – přírodních útvarů i artefaktů, které dokážeme rozeznávat a identifikovat. Umístění těchto věcí tvoří prostor, ve kterém se orientujeme a pohybujeme. V domě se orientujeme podle architektury místností, dveří, oken a nábytku, v krajině se orientujeme podle přírodních útvarů, jako jsou stromy, kopce, potoky či řeky, nebo podle artefaktů, jako jsou domy, ulice, stožáry či pomníky. Tyto objekty se mění tak málo a tak pomalu, že je vnímáme jako stálé a přisuzujeme jim skutečnou existenci. Věříme, že zůstanou na svých místech, i když jdeme jinam, a že je znovu najdeme, když se k nim vrátíme.

V nejbližším okolí domova známe většinu dostupných míst a opakovaně jimi procházíme. Význačné směry pro nás představují vzdálené charakteristické objekty, jejichž směr se při místním pohybu příliš nemění. V širším okolí chodíme nebo jezdíme spíše po cestách či silnicích. Na nich jsou informativní značky a určitá význačná místa, jako jsou rozcestí, charakteristické přírodní útvary nebo artefakty. Těm dáváme jména, a domlouváme se o nich v komunitě, ve které žijeme. Cesty, ulice a silnice tvoří jakési jednorozměrné sondy do prostoru dvourozměrné krajiny, která nám jinak zůstává neznámá. I když se pohybujeme krajinou mimo cesty, například při hledání hub, projdeme jen malou část krajiny. Třetí dimenzi zakoušíme při překonávání výškových rozdílů, při výstupu na horu nebo na rozhlednu. Ve své plnosti je ale vyhrazena rybám, ptákům a letadlům. Tato třetí dimenze prostoru je určována gravitací. V nerovné krajině ji musíme překonávat, nebo nám naopak cestu usnadňuje. Ocitneme-li se v neznámém prostředí, můžeme se podle gravitace orientovat. Jdeme-li stále dolů, máme naději, že narazíme na potok či řeku, podle které dojdeme do nejbližší vesnice nebo města. Gravitace se projevuje vodorovnou hladinou jezer nebo vertikálou některých stromů (je rovný jako jedle). Spolu s jevem tření je gravitace podmínkou našeho pohybu. Jen díky ní se můžeme o zemi opřít.[1]

Prostor poznáváme v první řadě pohybem a hmatem. Pohybujeme se v něm a dotýkáme se předmětů v něm umístěných. Uvědomujeme si, jaké musíme vynaložit úsilí, abychom k nim mohli dospět. To vysvětluje Michal Ajvaz:

> Představme si bytost, která se celý život pohybuje na vozíku, který někdo dálkově ovládá a který se hladce pohybuje po kolejích. Bytost nemá žádné prožitky síly vynakládané na vlastní tělesný pohyb a na odpor vůči tlaku, předměty jsou od ní dostatečně vzdálené, takže nemá ani žádné hmatové prožitky a pro jednoduchost si představme, že necítí ani jakýkoliv odpor vzduchu. Za těchto okolností bude perspektivní proměny tvarů, spojené se změnou místa (čtverce se mění v obdélníky, kruhy v ovály, plochy se překrývají, zmenšují a zvětšují), chápat pouze jako jakési proměny tvarů na ploše. Dokáže je zasazovat do řad souvislostí, a tedy i předvídat, nebude ale mít možnost pochopit, co je hloubka, a tedy ani co je prostor, tvar a pohyb (nechápe ani, že ona sama se pohybuje) a co jsou rozdíly vzdáleností v prostoru. K tomu, aby toto vše pochopila, by se musela alespoň minimálně pohybovat, vynakládat sílu, dotýkat se věcí a zakoušet jejich odpor: teprve potom si uvědomí kore-

[1] Poznámka recenzenta (PK): V základním pojetí geometrie ale gravitace a další síly přesahují koncepci prostoru. Jsou z domény fyziky, kde vedle prostorových vztahů hraje roli i vzájemné působení, pohyb a jeho dynamika. K poznávání prostoru sice pohyb a interakce s tělesy v prostoru využíváme. Koncepce prostoru a geometrie však od tohoto abstrahuje. Základní geometrie se zabývá právě jen rysy, které jsou od dynamiky a pohybu oprostěny. V tomto smyslu nám sice naše hmatové, časové a „interaktivní“ počitky prostor otevírají a pomáhají pochopit − jak je i líčeno dále. Ale nejsou ve skutečnosti částí geometrie samotné. Patří až do fyzikálního popisu. Geometrie od nich abstrahuje a zaměřuje se pouze na prostorové vztahy bez dynamiky, časových změn a interakcí.

> lace mezi proměnami perspektivních tvarů a různými mody vynakládání tělesné síly, včetně prožitků odporu neprostupných těles, které pohybu zabraňují, a z těchto korelací se pozvolna zrodí všechny prostorové významy – a ovšem zároveň se z prostorových významů zrodí plný význam „síly“ jako působení v určitém prostoru a čase (Ajvaz [2, str. 61]).

Předměty v našem okolí také vidíme a některé z nich můžeme i slyšet a cítit. Vnímáme, v jakém směru se nacházejí, jak jsou od nás daleko a jak se k nim přibližujeme nebo se od nich vzdalujeme. Některé z těchto předmětů dokážeme přemisťovat, tj. měnit jejich umístění vzhledem k jiným předmětům. Vnímáme také pohyb jiných lidí a zvířat i pohyby vozidel a vanutí větru. U všech těchto pohybů vnímáme jejich směry a rychlosti.

V pohybu se projevuje vztah mezi prostorem a časem. Čas vnímáme skrze periodické děje, jako je střídání dne a noci. V delším časovém horizontu je to střídání ročních období a postupná proměna věcí, které nás obklopují. Naopak v kratším časovém horizontu prožívaný čas koresponduje s fyziologickými ději našeho těla, s tepem srdce, s únavou, s jídlem. Objektivizujeme ho hodinami, které jsou založeny na fyzikálních realizacích harmonického oscilátoru a vytvářejí sdílený čas komunity.

Při pohybu v krajině vnímáme její topologii a metriku. To znamená, že si uvědomujeme, jak jsou uspořádána místa, kterými procházíme, nebo která vidíme, a jak jsou od sebe daleko. Délku cesty lze měřit krokováním nebo časem potřebným na její překonání. Přímé vzdálenosti mezi význačnými místy lze měřit délkou napnutého provazu nebo opticky dálkoměrem. Různé směry svírají úhly, které můžeme měřit úhloměrem či teodolitem. Metrika krajiny se objektivizuje souřadnými soustavami, jako je zeměpisná délka a šířka.

1.1 Eukleidovská geometrie

Abstrahujeme-li od význačných míst a význačných směrů, získáme homogenní a izotropní prostor rovinné či prostorové geometrie – geometrie, která je stejná v každém místě a v každém směru. Rovinná geometrie se odehrává v ideální rovině bez prohlubní a vyvýšenin. Ta není ničím omezena, nemá žádnou mez. Nalézají se v ní ideální geometrické útvary, jako jsou body, které nemají žádnou rozlohu, ideálně rovné přímky a úsečky, ideální trojúhelníky či kružnice. Mezi těmito geometrickými útvary jsou ideální vztahy jako **incidence** (bod leží na přímce), **kongruence** (stejná délka úseček), **mezilehlost** (bod leží na úsečce mezi jejími krajními body). Dokážeme-li nahlédnout geometrické objekty v jejich idealitě, dokážeme i nahlédnout některé ideální vztahy mezi nimi. Jiné přímo nahlédnout nedokážeme, ale můžeme k nim dospět pomocí rozumu, logiky nebo výpočtu. To podrobně analyzuje Petr Vopěnka (1935–2015) [55].

Protože ideální geometrický prostor je homogenní a izotropní, jeho body nemají žádnou individualitu, pomocí níž bychom je mohli rozlišovat. V tomto ohledu se geometrické struktury výrazně odlišují od algebraických struktur, ve kterých význačné objekty jsou, například nula nebo jednotka. O geometrických objektech můžeme mluvit jen tak, že je vztahujeme k jiným geometrickým objektům. Proto při studiu geometrie hrají podstatnou roli různé typy **souřadných soustav**, které umožňují geometrické objekty identifikovat. Volby těchto souřadných soustav jsou ale nutně arbitrární. Geometrické vztahy na nich nemohou záviset.

Idealita geometrických útvarů je společná všem geometriím. Do eukleidovské geometrie, která je vyložena v Eukleidových[2] *Základech*, vstupujeme, jakmile uvažujeme o pojmech **podobnosti** nebo **čtverce**. Dva rovinné nebo prostorové útvary jsou podobné, je-li jeden z nich zvětšením druhého v určitém poměru. Podobnosti se týkají nejstarší řecké zprávy o geometrii. Hérodotos[3] líčí, že Thalés[4] měřil výšku egyptských pyramid délkou jejich stínu v okamžiku, kdy svislá tyč vrhá stejně dlouhý stín jako ona sama. Jedná se tedy o podobnost rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Vzdálenost lodi, kterou vidíme na moři, lze určit tak, že ji pozorujeme ze dvou míst pobřeží a změříme úhly, pod kterými ji z těchto míst vidíme. Potom si nakreslíme zmenšený, tj. podobný model této situace se stejnými úhly a vzdálenost změříme na něm (viz Kratochvíl [31, str. 187]). Na podobnosti jsou založeny mapy, podle kterých se orientujeme v krajině, nebo plány domů, které stavíme.

[2] Eukleidés (třetí století před Kristem).
[3] Hérodotos (asi 484–425 před Kristem).
[4] Thalés z Milétu (asi 625–543 před Kristem).

Intenzivněji vnímáme topologii, metriku a geometrii prostoru při tvorbě artefaktů, například při stavbě přístřeší nebo domu. Jako půdorysy staveb přirozeně vyvstávají rovinné útvary jako kruh, obdélník nebo čtverec, které jsou charakteristickými objekty eukleidovské geometrie. Zákony statiky nás nutí respektovat gravitaci. Přitom potřebujeme nejjednodušší geometrické nástroje: olovnici pro vyměřování vertikál, vodováhu pro vyměřování vodorovných rovin, pásmo pro měření délek a úhelník jako etalon pravého úhlu. Ten lze také sestrojit pomocí pythagorejských trojic jako $(3, 4, 5)$ nebo $(5, 12, 13)$.

Jens Høyrup [25] a Jøran Friberg [18] dokládají, že takováto „eukleidovská“ geometrie se po mnoha generacích předávala z mistra na učedníka v prostředí praktických matematiků: architektů, stavitelů, zeměměřičů a účetních. Ti nenapsali žádné traktáty ani učebnice, ale zůstaly po nich výrazné stopy v klínopisných tabulkách Staré Babylonie a ovlivňovali i geometrii antického Řecka do té míry, že z pojmů podobnosti a čtverce se stala slova běžného jazyka a byly pochopeny ve své idealitě. Jen tak bylo možné, že nevzdělaný otrok z Platónova[5] dialogu Menón [41] věděl, co je čtverec, a dokázal ho nahlédnout v jeho idealitě. Teprve to mu umožnilo evidovat, že čtverec nad úhlopříčkou má dvojnásobnou plochu.

Kvantitativní vztahy eukleidovské geometrie se pojednávají v nauce o poměrech a v trigonometrii – nauce o trojúhelnících. Známe-li délky stran trojúhelníku, můžeme z nich vypočítat velikosti jeho úhlů. Pokud známe dvě strany a úhel jimi sevřený, můžeme vypočítat třetí stranu i zbylé dva úhly. A známe-li jednu stranu a přilehlé dva úhly, můžeme vypočítat třetí úhel a ostatní dvě strany. Tyto výpočty jsou založeny na sinové a kosinové větě. Z úhlů trojúhelníku ale nemůžeme určit jeho strany, pouze jejich poměry. Podobné trojúhelníky mají totiž úhly stejné.

1.2 Sférická geometrie

V krajinách, ve kterých nenajdeme žádné záchytné orientační body, jako jsou pouště či otevřené moře, se můžeme orientovat podle Slunce, Měsíce nebo hvězd. Také tyto nebeské útvary či úkazy mají svou identitu,

[5] Platón (427–347 před Kristem).

která přetrvává v čase. Apriori není úplně zřejmé, že Slunce, které vyšlo dnes, je to samé Slunce, které včera večer zapadlo. Ale vypadá stejně a pohybuje se (skoro) po stejné dráze, takže ho za to samé Slunce považujeme. Podobně přisuzujeme nezaměnitelnou individualitu a identitu Měsíci, který nejen vychází a zapadá, ale také ubývá až zmizí docela, aby se po několika dnech objevil jako Nový Měsíc.

Na rozdíl od Slunce a Měsíce s jejich charakteristickým vzhledem, se nám hvězdy jeví jako bezrozměrné body – nejsou právě ony prototypem pojmu geometrického bodu? Liší se od sebe jen svou jasností a barvou a je obtížnější je identifikovat. Na obloze ale vytvářejí souhvězdí – stabilní obrazce, do kterých si promítáme antická božstva a identifikujeme je podle tvaru.[6] Na rozdíl od pozemských orientačních útvarů, ke kterým můžeme přistupovat aktivně, k nebeským útvarům se vztahujeme pasivně. Nemůžeme k nim dojít a už vůbec ne s nimi hýbat. Nevnímáme přímo jejich vzdálenost. Vnímáme a měříme pouze úhly mezi nimi, tj. úhly paprsků, které od nich k nám putují. Teprve ve dvacátém století vedly sofistikované teorie a měřící techniky k tomu, že vzdálenosti hvězd či galaxií dokážeme určovat nebo aspoň odhadovat.

Noční obloha se během noci otáčí kolem pólu v blízkosti Polárky. Přitom se nemění úhly mezi jednotlivými hvězdami.[7] Noční obloha se také mění v průběhu roku. Souhvězdí v blízkosti pólu jsou viditelná celý rok, jiná jen v určitých ročních obdobích. To vede k pojmu myšlené nebeské sféry, z níž vidíme vždy jenom část ohraničenou kružnicí obzoru. Pohyb nebeské sféry určuje její význačné útvary severního a jižního pólu, hlavní kružnice rovníku a poledníků a vedlejší kružnice rovnoběžek. Ty vidět nejsou. Jsou to myšlené útvary určené otáčením nebeské sféry. Nebeská sféra je prototypem řádu a předvídatelnosti. Ve svém sepětí proměnlivosti a stability je výrazným protikladem k pozemské (sublunární) sféře s její chaotičností a nepředvídatelností.

Mezi souhvězdími nebeské sféry se pohybují planety – bludné hvězdy. Nejrychleji se pohybuje Měsíc, o něco pomaleji planety Merkur, Venuše

---

[6] Dramaticky je tento aspekt vylíčen v dodatku *The rainmaker* knihy Hermanna Hesse *Magister Ludi* [20, str. 413]. Pojednává o domorodém kmeni, který se stane svědkem, dnešním jazykem řečeno, meteorického roje. Pro ně to ovšem znamená, že se bortí nebeská klenba a že přichází konec světa. Pouze šaman, který dokáže identifikovat souhvězdí, si uvědomí, že staré hvězdy na obloze zůstávají.

[7] S výjimkou hvězd těsně nad obzorem, jejichž paprsky se lámou v atmosféře.

a Mars a nejpomaleji vnější planety Jupiter, Saturn, Uran a Neptun. Pozorování hvězdné oblohy krátce po setmění a krátce před svítáním vede k náhledu, že se mezi souhvězdími pohybuje i Slunce, v jehož svitu sice hvězdy nejsou vidět, ale na obloze zůstávají i ve dne. Roční dráha Slunce po nebeské sféře je ekliptika. To je další význačná hlavní kružnice nebeské sféry. Ekliptika protíná rovník v jarním a podzimním bodě. Poledníky počítané od jarního bodu spolu s rovníkem a rovnoběžkami tvoří souřadnou soustavu nebeské sféry. Každý její bod lze jednoznačně určit poledníkem a rovnoběžkou, které jím procházejí – její rektascenzí a deklinací.

Sférická geometrie se odehrává na ideální sféře, ve které abstrahujeme od všech konkrétních nebeských útvarů i od nebeských souřadnic. Nalézají se na ní jen ideální body a ideální kružnice. Geometrie sféry se v něčem podobá geometrii roviny, v něčem se ale liší. Analogií přímek jsou na sféře hlavní kružnice. To jsou průniky sféry s rovinou, která prochází jejím středem. Nejkratší spojnicí dvou bodů sféry je oblouk (část) hlavní kružnice. Pokud tyto body nejsou protilehlé, existuje jediná jejich nejkratší spojnice. Z oblouků hlavních kružnic lze sestavovat trojúhelníky nebo mnohoúhelníky, lze měřit jejich délky a úhly mezi nimi i plochy sférických obrazců.

Sférická trigonometrie studuje sférické trojúhelníky, jejichž strany jsou oblouky hlavních kružnic. Součet úhlů sférického trojúhelníku je vždy větší než 180 stupňů a je tím větší, čím je větší jeho plocha. Také ve sférické trigonometrii máme sinovou a kosinovou větu, podle které můžeme ze tří údajů trojúhelníku vypočítat ostatní tři. Na rozdíl od eukleidovské geometrie ale také můžeme vypočítat strany trojúhelníku z jeho úhlů.

1.3 Newtonův absolutní prostor a čas

Tychonova[8] supernova z roku 1572 a Keplerova[9] supernova z roku 1604 pomohly rozbít představu neměnné hvězdné sféry.[10] Giordano Bruno

[8] Tycho Brahe (1546–1601).

[9] Johannes Kepler (1571–1630).

[10] V antice představa nebeské sféry všeobecně přijímána nebyla. Ve středověké Evropě byla přijata zejména pod vlivem Tomáše Akvinského (1225–1274).

(1548–1600) si již představuje nekonečný vesmírný prostor, ve kterém je nekonečný počet hvězd. Z této představy vychází Newtonův[11] nekonečný absolutní prostor.[12]

Ten je fixován vzdálenými hvězdami, které se chápou jako nehybné. Významným pevným bodem tohoto prostoru je těžiště sluneční soustavy. Okolo něj krouží všechny planety, a dokonce i Slunce, i když těžiště sluneční soustavy uvnitř Slunce stále zůstává. Newtonovy pohybové zákony a Newtonův gravitační zákon jednoznačně určují pohyby všech těles (nebo spíše všech hmotných bodů), které se v absolutním prostoru nacházejí.

Absolutní prostor má přirozenou kartézskou souřadnou soustavu, jejíž počátek je v těžišti sluneční soustavy. **Inerciální vztažné soustavy** jsou ty, které se vzhledem k abolutnímu prostoru pohybují přímočaře a rovnoměrně a neotáčí se. Newton ukazuje, že v inerciálních soustavách platí stejné zákony mechaniky jako v absolutním prostoru. Těžiště sluneční soustavy tím ztrácí svou privilegovanou pozici, takže newtonovský prostor je homogenní a izotropní.

1.4 Projektivní geometrie

Sférické geometrii se v něčem podobá projektivní geometrie, která se odvozuje od pohledu malíře na kreslenou scénu. Tak jako hvězdář pozoruje úhly mezi hvězdami, malíř krajinou neprochází, ale pozoruje ji z jednoho místa a vnímá pouze úhly, pod kterými krajinné útvary vidí. Tyto trojrozměrné útvary promítá na rovinné plátno. Jedná-li se o malbu nepříliš zvlněné krajiny, dostáváme geometricky jednodušší situaci průmětu jedné roviny na druhou. V kontextu eukleidovské geometrie chápeme malovanou krajinu i plátno jako nekonečnou rovinu. Projektivní geometrie doplňuje eukleidovskou rovinu o **nevlastní body** v nekonečnu, ve kterých se protínají rovnoběžné přímky. Tímto doplněním vzniká z eukleidovské roviny projektivní rovina. Na každé její přímce je jeden nevlastní bod v nekonečnu, v obou směrech stejný, který z ní dělá

[11] Isaac Newton (1642–1727).

[12] Poznámka recenzenta (PK): „Přidaná hodnota“ absolutního prostoru oproti geometrickému eukleidovskému prostoru je „pojem klidu“. Ten dává základ pro dynamiku newtonovské fyziky. Absolutní protor tak přesahuje základní geometrickou koncepci.

útvar topologicky ekvivalentní kružnici. Geometrie projektivní roviny je jednodušší než geometrie eukleidovské roviny. V projektivní geometrii platí nejen, že každé dva různé body určují jedinou přímku, na které oba leží, ale také se každé dvě různé přímky protínají v jediném bodě. Při projekcích se nezachovávají vzdálenosti ani úhly. Proto se těmito pojmy projektivní geometrie nezabývá. Přímky se ale zobrazují na přímky, kuželosečky se zobrazují na kuželosečky a zachovává se vztah incidence. Místo metriky se v projektivní geometrii studuje dvojpoměr. To je metrický invariant čtyř bodů na přímce, který se při projekcích zachovává.

V Erlangenském programu Felixe Kleina (1849–1925) má projektivní geometrie specifické postavení jako základ geometrií všech homogenních prostorů: afinního, eukleidovského, hyperbolického i eliptického. Homogenní prostory jsou „všude stejné“. Jsou charakterizovány vlastností, že geometrické útvary se v nich mohou pohybovat, aniž by měnily svůj tvar, tj. aniž by se měnily vzdálenosti jejich bodů.

1.5 Neeukleidovské geometrie

Pátý Eukleidův axiom o rovnoběžkách byl již od antiky přijímán s rozpaky. Zdálo se, že je nadbytečný, a proto se ho mnoho matematiků pokoušelo dokázat z ostatních axiomů. Nejslibnější pokus o takový důkaz se vede sporem. Předpokládá se, že platí jeho negace, a odvozují se její důsledky, aby se nakonec dospělo k logickému sporu. Různí matematici tak odvodili mnohé paradoxní důsledky, ale žádný spor.

Začátkem devatenáctého století Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) a János Bolyai (1802–1860) dospěli k náhledu, že negace pátého axiomu ke sporu nevede a že její důsledky tvoří podivuhodný svět neeukleidovské hyperbolické geometrie. V ní lze každým bodem vést nekonečně mnoho rovnoběžek k přímce, která tímto bodem neprochází. Hyperbolická geometrie vykazuje pozoruhodnou symetrii se sférickou geometrií. Tam, kde ve sférické trigonometrii vystupují goniometrické funkce sinus a kosinus, v hyperbolické geometrii vystupují funkce hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus odvozené z exponenciály. Hyperbolická geometrie ale neměla oporu v názoru. Na rozdíl od sférické a projektivní geometrie nebyla k dispozici žádná ideální hyperbolická rovina, na které by bylo možné věty hyperbolické geometrie evidovat. Důkazy jejích vět byly založeny pouze na logice a výpočtech.

To se změnilo v druhé polovině devatenáctého století, kdy Felix Klein, Eugenio Beltrami (1835–1900) a Henri Poincaré (1854–1912) předložili modely hyperbolické geometrie uvnitř eukleidovské geometrie. Ukázali tak, že hyperbolická geometrie je bezesporná, a stvořili ideální geometrický prostor, na kterém lze věty hyperbolické geometrie evidovat. Současně se s tím ale oslabila vazba geometrie na přirozený svět.

Mezitím objevil Bernhard Riemann (1826–1866) eliptickou geometrii jako druhou neeukleidovskou geometrii. V ní žádné rovnoběžky nejsou. Každé dvě různé přímky se protínají. Eliptická geometrie unikla pozornosti objevitelů hyperbolické geometrie, protože její přímky jsou do sebe uzavřené podobně jako kružnice. Riemann si ale uvědomil, že jejich klíčová vlastnost, na které lze vybudovat eliptickou geometrii, je neomezenost. Při jejich procházení na žádnou mez nenarazíme.

1.6 Gaussova geometrie ploch

V souvislosti s rozvojem diferenciálního počtu se v novověku začaly studovat rovinné a prostorové křivky vnořené do trojrozměrného prostoru. Pomocí integrálního počtu lze určovat jejich délku. Tvar rovinné křivky plně charakterizuje její křivost. To je převrácená hodnota poloměru její oskulační kružnice, která se ke křivce v daném bodě nejtěsněji přimyká. Podél křivky se její křivost může měnit. Je-li stálá, jedná se o kružnici. Prostorové křivky kromě křivosti charakterizuje ještě torze, tj. rychlost otáčení roviny její oskulační kružnice.

Studují se také dvourozměrné plochy vnořené do trojrozměrného prostoru. Jejich geometrie nemusí být ani homogenní, ani izotropní. Výraznou geometrickou charakteristikou je křivost plochy v daném bodě charakterizovaná křivostí křivek, které tímto bodem procházejí. Součin nejmenší a největší z těchto křivostí se nazývá Gaussova křivost. Na sféře nebo na vrcholu hory je Gaussova křivost kladná: všechny křivky procházející takovým bodem se ohýbají na stejnou stranu. Na povrchu zvonu nebo na horském sedle je Gaussova křivost záporná. Křivky procházející daným bodem se ohýbají na různé strany. Významným a překvapivým výsledkem teorie ploch je Gaussova **Teoréma egregium** (pozoruhodný teorém), který říká, že Gaussova křivost plochy nezávisí na tom, jak je tato plocha vnořena do trojrozměrného prostoru, ale jen na měřeních, která lze provádět uvnitř ní. Představu měření uvnitř dvourozměrné plochy zpopularizoval Edwin A. Abbott (1838–1926) ve své knize *Flatland. A Romance in Many Dimensions* [1] z roku 1884. Pojednává o bytostech, které žijí a pohybují se v dvourozměrném světě.

Významné jsou plochy s konstantní Gaussovou křivostí, protože jsou, podobně jako eukleidovská rovina, homogenní a izotropní. Jejich lokální geometrie je všude stejná a geometrické útvary se na nich mohou posouvat, aniž by měnily svůj tvar. Nejjednodušší plocha s konstantní nulovou Gaussovou křivostí je eukleidovská rovina, je jí ale i povrch válce. Nejjednodušší plocha s konstantní kladnou křivostí je sféra. Existuje také plocha s konstantní zápornou křivostí, která se nazývá **pseudosféra**.

1.7 Riemannova geometrie

Paradigmatický posun v geometrii uskutečnil Bernhard Riemann tím, že geometrii ploch odpoutal od vnoření do trojrozměrného prostoru. Navazuje přitom na Gausse, který tento posun anticipoval svou Teorémou egregium. Riemannova geometrie je založena na metrickém tenzoru, který stanovuje délky infinitesimálních tečných vektorů. Díky němu lze určovat délky křivek, úhly, které spolu svírají i plošný obsah geometrických útvarů. Analogií přímek jsou v Riemannově geometrii geodetiky – nejkratší spojnice bodů. Později Riemannovu geometrii podstatným způsobem doplnil Tullio Levi-Civita (1873–1941) pojmy afinní konexe a rovnoběžného posunu vektorů. Tyto pojmy vedly k náhledu, že geodetiky jsou nejen nejkratší spojnice svých krajních bodů, ale také křivky, které nemění svůj směr.

V Riemannově geometrii lze studovat i plochy s konstantní křivostí, které nelze vnořit do trojrozměrného prostoru a které jsou modely neeukleidovských geometrií. V nich platí všechny Eukleidovy postuláty kromě pátého postulátu o rovnoběžkách. Plocha s konstantní zápornou křivostí je model hyperbolické geometrie. V ní lze daným bodem vést k dané přímce nejen jednu, ale nekonečný počet rovnoběžek. Plocha s kladnou konstantní křivostí je model eliptické geometrie. V ní žádné rovnoběžky nejsou. Její metrický tenzor je odvozen ze sférické geometrie. Neodehrává se ale na sféře, ale na projektivní rovině.

Riemannovu geometrii lze rozvíjet v libovolné konečné dimenzi a s malými modifikacemi i v čtyřrozměrném prostoročase. Je na ní založena Einsteinova obecná teorie relativity.

1.8 Einsteinův prostoročas

Newtonův absolutní prostor byl opuštěn pod tlakem experimentální evidence, že rychlost světla je stejná ve všech inerciálních soustavách (které se navzájem pohybují rovnoměrně a přímočaře). Druhým impulsem byly Maxwellovy[13] rovnice, které popisují šíření světla a obecnějších elektromagnetických vln. Tyto rovnice nejsou invariantní vůči Galileově[14] transformaci, která vyjadřuje ekvivalenci inerciálních soustav Newtonova absolutního prostoru. Jsou ale invariantní vůči Lorentzově[15] transformaci, která nezachovává ani absolutní prostor, ani absolutní čas. Albert Einstein (1879–1955) dospěl k náhledu, že čas ani prostor nejsou absolutní, ale jsou relativní vzhledem k danému inerciálnímu pozorovateli. Pro různé inerciální pozorovatele probíhá čas různě a měření vzdáleností dává různé výsledky. Hermann Minkowski (1864–1909) zavedl pojem prostoročasu, který spojuje čas a prostor do jediné geometrické struktury. V Einsteinově obecné teorii relativity je geometrie prostoročasu určena rozložením hmoty a energie a toto rozložení je zpětně určováno geometrií prostoročasu.

Astronomické objevy dvacátého století vedly k rozepnutí vesmíru do závratných hlubin a dálek. Byly určeny pozice a pohyby hvězd naší galaxie Mléčné dráhy a kromě Mléčné dráhy byly identifikovány miliardy jiných galaxií. Také ty se navzájem pohybují. Jejich vzájemné pohyby již nelze popsat newtonovskou dynamikou, ale vystihuje je Einsteinova obecná teorie relativity.

[13] James Clark Maxwell (1831–1879).
[14] Galileo Galilei (1564–1642).
[15] Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928).

Kapitola 2

Eukleidovská geometrie

2.1 Eukleidovy *Základy*

Eukleidovy *Základy* jsou nejvýznamnějším textem matematiky helénistického středomoří, který se nám dochoval. Byly napsány v Alexandrii ve třetím století před Kristem a sestávají ze třinácti knih, které pojednávají o planimetrii, teorii čísel a stereometrii. *Základy* pravděpodobně zahrnují starší materiál z pojednání, která jsou dnes již ztracena. Druhá kniha sahá svými kořeny až ke starobabylonské matematice s jejím největším rozkvětem v období 2000 až 1600 před Kristem (viz Friberg [18]). Pátá kniha je připisována Eudoxovi (asi 408–355 před Kristem) a desátá Theaitétovi (asi 417–369 před Kristem). *Základy* pojednávají o konstrukcích geometrických útvarů kružítkem a pravítkem a o vlastnostech takto sestrojených útvarů. Tato technika mohla sloužit podobně jako analogový počítač:

> Každý problém týkající se spojitých veličin byl převeden do geometrického jazyka. Data byla reprezentována délkami úseček. Řešením byla geometrická konstrukce úsečky, jejíž délka představovala hledanou veličinu a ta byla změřena. Nástroje používané v geometrických konstrukcích byly především kružítko a pravítko, které tak byly nejen kreslicí, ale také výpočetní nástroje (Russo [45, str. 41]).

Eukleidovská rovinná geometrie pojednává o ideální rovině, jejímž předobrazem může být hladina jezera nebo deska stolu. Ideální eukleidovská rovina je ideálně hladká bez vyvýšenin a prohlubní a rozprostírá se do nekonečna. Je homogenní a izotropní: je všude stejná, nejsou v ní žádná význačná místa ani žádné význačné směry. V této ideální rovině mohou být umístěny ideální geometrické útvary, jako jsou body, přímky, polopřímky, úsečky, úhly, trojúhelníky nebo mnohoúhelníky. Idealitu těchto rovinných útvarů přibližují výměry (definice) první knihy *Základů*:

Definice

1. *Bod* je to, co k nemá žádnou část.
2. *Čára* je délka bez šířky.
3. *Hranice* čáry jsou body.
4. *Přímá čára* je ta, která je vůči bodům na ní ležícím umístěna stejně.
5. *Plocha* je to, co má pouze délku a šířku.
6. *Hranice plochy* jsou čáry.
7. *Rovinná plocha* je ta, která je vůči přímým na ní ležícím umístěna stejně.
8. *Rovinný úhel* je vzájemný sklon dvou čar, které se navzájem stýkají v rovině a které neleží v jedné přímé.
9. Když jsou čáry svírající úhel přímé, nazývá se tento *úhel přímočarý*.[1]
10. Když přímá, která je postavena na přímou, vytváří navzájem stejně velké sousední úhly, je každý z těchto stejně velkých úhlů *pravý* a postavená přímá se nazývá *kolmá* na tu, na kterou byla postavena (Eukleidés [17, str. 111]).

Další jsou definice kružnice a kruhu, různých druhů trojúhelníků, rovnoběžníků a nakonec rovnoběžek jako „přímých čar, které, prodlouží-li se do nekonečna, nikde se neprotnou“.

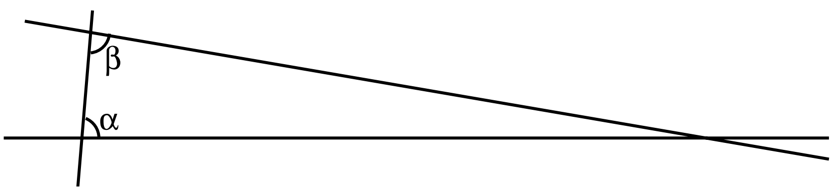
S ideálními geometrickými útvary pracuje již starobabylonská matematika, i když v ní jsou tyto útvary vždy konkrétní s konkrétními velikostmi. Co je však u Eukleida nové, je jeho axiomatická metoda.

[1] Na rozdíl od úhlu křivočarého, který tvoří například dotýkající se kružnice.

Některé vztahy mezi rovinnými útvary nahlížíme jako evidentní – evidujeme je, pokud je dokážeme nahlížet v jejich idealitě. Jiné vztahy takto evidentní nejsou, ale mohou být přivedeny k evidenci buď doplněním o další vztahy, nebo logickými argumenty (viz Vopěnka [55]). V *Základech* jsou některé evidentní vztahy prohlášeny za axiomy, ze kterých se ostatní vztahy odvozují. Logická struktura *Základů* se odvíjí od postulátů (axiomů) a zásad (obecných principů), které jsou uvedeny na začátku první knihy.

Postuláty

1. Nechť se požaduje vést přímou čáru z každého bodu do každého bodu.
2. A omezenou přímou čáru souvisle prodloužit přímým směrem.
3. A pro každý střed a každý rozestup narýsovat kruh.
4. A aby si všechny pravé úhly byly navzájem rovny.
5. A jestliže nějaké dvě přímé protne jiná přímá tak, že vytvoří na jedné straně vnitřní úhly menší než dva pravé, pak aby se tyto přímé, budou-li prodlouženy do nekonečna, setkaly na té straně, na které jsou úhly menší než dva pravé (Eukleidés [17, str. 115]).



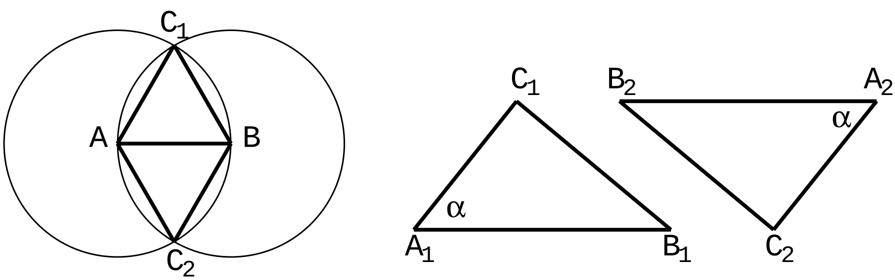
Obrázek 2.1: Pátý Eukleidův postulát: $\alpha + \beta < 180°$.

Zatímco první tři postuláty jsou konstrukce, tj. návody na sestrojení určitých útvarů, čtvrtý a pátý postulát vyjadřují určité vlastnosti geometrických útvarů. Čtvrtý postulát vyjadřuje izotropii eukleidovské roviny. Nezáleží na tom, kde jsou pravé úhly umístěny a jak jsou natočeny. Vždy je lze přenést tak, aby se kryly. Pátý postulát (obr. 2.1) je pozoruhodný tím, že mluví o nekonečnu.

Obecné principy

1. Co se rovná témuž, rovná se i navzájem.
2. A jestliže se ke stejně velkým věcem přidají stejně velké věci, pak se celky rovnají.
3. A jestliže se od stejně velkých věcí odeberou stejně velké věci, pak se zbytky rovnají.
4. A jestliže se k nestejně velkým věcem přidají stejně velké věci, pak se celky nerovnají.
5. A dvojnásobky téhož se navzájem rovnají.
6. A poloviny téhož se navzájem rovnají.
7. A co se navzájem překrývá, navzájem se rovná.
8. A celek je větší než část.
9. A dvě přímé čáry nesvírají plochu (Eukleidés [17, str. 117]).

Také v dalším textu *Základů* se rozlišují konstrukce, což jsou návody, jak sestrojit určitý geometrický útvar, a tvrzení (teorémy), ve kterých se vyslovují a dokazují jejich vlastnosti. Důkazy těchto vět jsou založeny nejen na vyslovených postulátech a obecných principech, ale také na vlastnostech intuitivně zřejmých z názoru. Vyjasňování těchto nevyslovených předpokladů sehrálo v historii geometrie důležitou roli. Uveďme si několik vět z první knihy *Základů*, ve kterých lze tyto nevyslovené předpoklady odhalit. Věty uvádíme v překladu Richarda Maška nebo Františka Servíta, jejich důkazy zestručňujeme.



Obrázek 2.2: Věta I.1 (vlevo) a I.4 (vpravo) první knihy *Základů*.

Věta 2.1 (Eukleidova I.1) *Nad danou omezenou přímkou sestrojit rovnostranný trojúhelník (Eukleidés [17, str. 119]).*

Důkaz: Pro danou úsečku AB sestrojíme kružnici se středem A, která prochází bodem B, a kružnici se středem B, která prochází bodem A. Tyto kružnice se protínají ve dvou bodech C_1 a C_2. Oba trojúhelníky $\triangle ABC_1$ i $\triangle ABC_2$ jsou rovnostranné (obr. 2.2 vlevo). QED[2]

Existence bodů C_1, C_2 ale není samozřejmá. Plyne teprve z principu spojitosti. Čáry jako přímky či kružnice jsou spojité, nejsou v nich mezery, a teprve proto existují jejich průsečíky.

Věta 2.2 (Eukleidova I.4) *Jestliže dva trojúhelníky budou mít dvě strany rovny dvěma stranám, jednu jedné a druhou druhé, a i oba úhly sevřené těmito stejně velkými přímými budou stejně velké, pak budou mít i základnu rovnou základně a trojúhelník se bude rovnat trojúhelníku a zbývající úhly proti stejně velkým stranám se budou rovnat zbývajícím úhlům, jeden jednomu a druhý druhému (Eukleidés [17, str. 119]).*

Důkaz: Nechť $\triangle A_1B_1C_1$ a $\triangle A_2B_2C_2$ jsou trojúhelníky, pro které platí $A_1B_1 \equiv A_2B_2$, $A_1C_1 \equiv A_2C_2$, $\angle B_1A_1C_1 \equiv \angle B_2A_2C_2$ (obr. 2.2 vpravo). To znamená, že odpovídající si strany trojúhelníků jsou **kongruentní**, tj. mají stejnou délku, a také jimi sevřené úhly jsou kongruentní. Pak lze $\triangle A_2B_2C_2$ přenést tak, aby úsečka A_2B_2 splynula s úsečkou A_1B_1 a aby úhel $\angle B_2A_2C_2$ splynul s úhlem $\angle B_1A_1C_1$. Pak také úsečka A_2C_2 splyne s úsečkou A_1C_1 a úsečka B_2C_2 splyne s úsečkou B_1C_1, takže tyto trojúhelníky mají stejně velké odpovídající si strany i úhly. QED

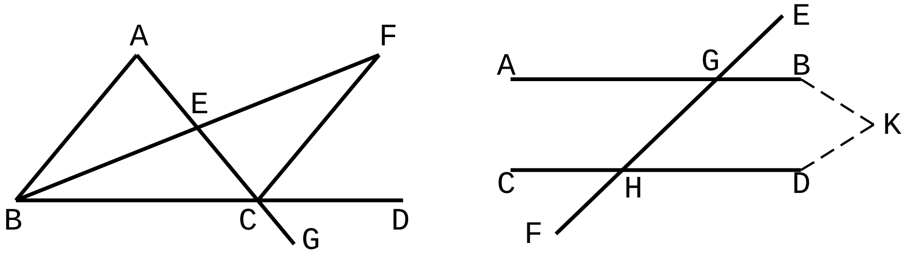
Zde je nevysloveným předpokladem možnost přenášení, či pohybu geometrických útvarů, při kterém se nemění jejich tvar.[3]

Věta 2.3 (Eukleidova I.16) *V každém trojúhelníku, jehož jedna strana se prodlouží, vnější úhel větší jest než kterýkoliv protější úhel vnitřní (Eukleidés [16, str. 10]).*

Důkaz: Stranu BC trojúhelníku ABC (obr. 2.3 vlevo) prodloužíme do bodu D. Sestrojíme střed E úsečky AC a úsečku BE prodloužíme do bodu F tak, že $BE \equiv EF$. Pak trojúhelníky $\triangle AEB$, $\triangle CEF$ jsou podle věty 2.2 shodné, takže $\angle BAC \equiv \angle FCE < \angle ACD$. Podobně se ukáže, že $\angle ABC < \angle BCG = \angle ACD$. QED

[2] Quod erat demonstrandum (což se mělo dokázat) značí konec důkazu.

[3] To je charakteristická vlastnost homogenních geometrií kapitoly 6.



Obrázek 2.3: Věta I.16 (vlevo) a rovnoběžky (vpravo).

Zde je $\angle FCE < \angle ACD$ zřejmé z názoru, ale chybí pro to logické argumenty. Na zpochybnění této věty je založena eliptická geometrie (viz odstavec 3.4).

Věta 2.4 (Eukleidova I.17) *V každém trojúhelníku součet kterýchkoli dvou úhlů jest menší dvou pravých (Eukleidés [16, str. 10]).*

Důkaz: $\angle BAC + \angle ACB < \angle ACD + \angle ACB = 180°$ (obr. 2.3 vlevo). QED

Další téma první knihy *Základů* jsou rovnoběžky, tj. dvojice úseček, jejichž žádná prodloužení se neprotínají. Nechť AB, CD a EF jsou úsečky (obr. 2.3 vpravo) s průsečíky $G = (AB)(EF)$, $H = (CD)(EF)$.

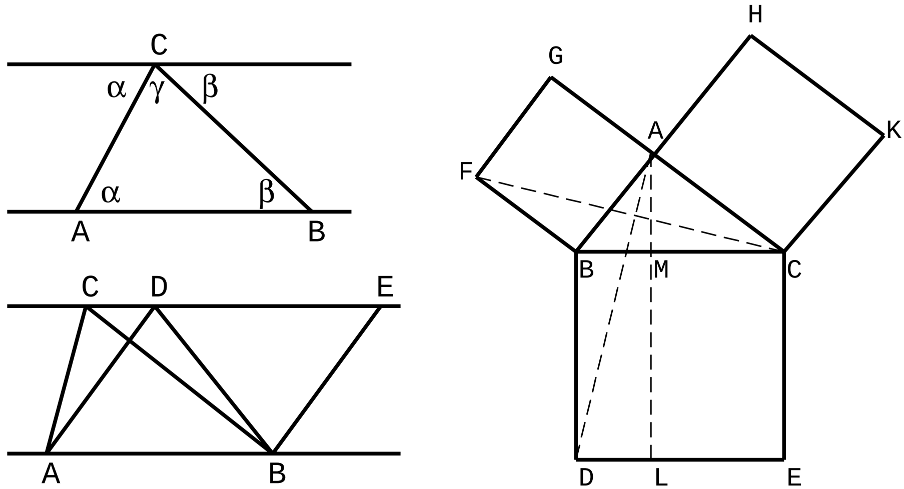
Věta 2.5 (Eukleidova I.27) *Když přímka protínajíc přímky dvě tvoří střídavé úhly navzájem stejné, budou ty přímky navzájem rovnoběžné (Eukleidés [16, str. 15]).*

Důkaz: Podle předpokladu je $\angle AGH \equiv \angle GHD$. Kdyby přímky AB, CD nebyly rovnoběžné, protínaly by se v nějakém bodě K a v trojúhelníku $\triangle HGK$ by se vnější úhel $\angle AGH$ rovnal vnitřnímu úhlu $\angle GHK$, což je ve sporu s větou 2.3 (Eukleidova I.16).

Věta 2.6 (Eukleidova I.29) *Přímka protínajíc rovnoběžky tvoří střídavé úhly navzájem stejné a úhel vnější vnitřnímu protějšímu rovný a vnitřní na téže straně dvěma pravým rovný (Eukleidés [16, str. 16]).*

Důkaz: Není-li $\angle AGH = \angle GHD$, pak jeden z nich, například $\angle GHD$ je menší. Pak ale $\angle GHD + \angle HGB < \angle AGH + \angle HGB = 180°$ a podle pátého postulátu se polopřímky GB a HD protínají v nějakém bodě K. To je ale ve sporu s předpokladem jejich rovnoběžnosti. QED

V tomto důkazu Eukleidés poprvé použije pátý postulát. Z vět 2.5 a 2.6 plyne, že vztah rovnoběžnosti je tranzitivní. Je-li $AB \| CD$ a $CD \| EF$, pak také $AB \| EF$ (Eukleidova věta I.30). Věta I.31 je konstrukce rovnoběžky k dané úsečce procházející daným bodem, který na dané úsečce neleží. A z toho již plyne, že součet úhlů trojúhelníku je roven dvěma pravým (Věta I.32, obr. 2.4 vlevo nahoře). To je příklad tvrzení, které jen z názoru samotného trojúhelníku zřejmé není. Stane se zřejmým teprve když bodem C vedeme rovnoběžku ke straně AB. V tom se liší od některých předcházejících vět, které z názoru zřejmé jsou. Petr Vopěnka [55] rozlišuje geometrická tvrzení, která lze přímo evidovat názorem, od těch, jejichž důkazy poskytují návod na přivádění k evidenci a od těch, jejichž důkazy se nespoléhají na evidenci, ale na rozum a logiku.



Obrázek 2.4: Součet úhlů trojúhelníku (vlevo nahoře), obsah trojúhelníku (vlevo dole) a Pythagorova věta (vpravo).

Teorie rovnoběžek je dále použita k určování plošných obsahů rovinných útvarů. Věta I.37 (Eukleidés [16, str. 20]) říká, že „trojúhelníky na téže základně mezi týmiž rovnoběžkami jsou si rovny“, tj. mají stejný plošný obsah (obr. 2.4 vlevo dole): Trojúhelník $\triangle ABC$ má stejný plošný obsah jako $\triangle ABD$. A ten je polovinou obsahu rovnoběžníku