Ivan Štoll
Jiří Tolar
Igor Jex

Klasická teoretická fyzika

KAROLINUM

$\delta S = 0$

Klasická teoretická fyzika

Ivan Štoll
Jiří Tolar
Igor Jex

Recenzovali:
prof. RNDr. Jiří Hořejší, DrSc.
prof. RNDr. Peter Prešnajder, DrSc.

Publikace byla vydána za podpory Ministerstva školství, mládeže
a tělovýchovy a Národního plánu obnovy v rámci projektu
Transformace pro VŠ na UK (reg. č. NPO_UK_MSMT-16602/2022).

Vydala Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum
Praha 2024
Obálka Jan Šerých
Sazba autoři systémem LaTeX
Vydání druhé

ISBN 978-80-246-5779-0
ISBN 978-80-246-5819-3 (pdf)

Univerzita Karlova
Nakladatelství Karolinum

www.karolinum.cz
ebooks@karolinum.cz

Obsah

Předmluva

Předkládaná učebnice klasické teoretické fyziky vznikla na základě přednášek, které její autoři konali po řadu let na fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze. Zabývá se klasickou mechanikou a elektrodynamikou, a to i z hlediska speciální teorie relativity, a rozvíjí příslušný matematický aparát. Je tedy makroskopickým, limitním případem fyziky kvantové, která dnes tvoří nejrozsáhlejší a nejbohatší oblast teoretické fyziky. Učebnice je určena těm, kdo už absolvovali kurz obecné fyziky v rozsahu prvního ročníku vysoké školy, ovládají základy diferenciálního a integrálního počtu a jsou připraveni získat obecnější, hlubší a elegantnější přístup k základním jevům klasické fyziky. Rozvíjený matematický aparát také umožňuje řešit celou řadu nových fyzikálních problémů zařazených jako Úlohy za každou kapitolou.

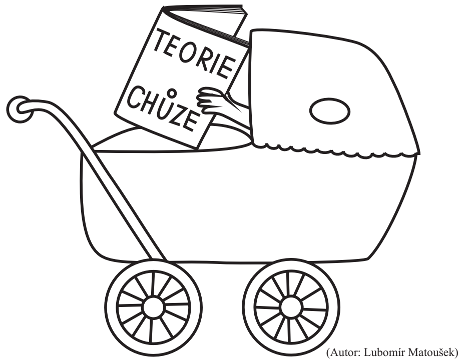
V Newtonově mechanice vycházíme z řešení vektorových pohybových rovnic, v nichž ovšem musíme předepsat explicitní vyjádření působících sil. Tato metoda založená na využití teorie diferenciálních rovnic slavila a dosud slaví úspěch při řešení mnoha problémů například v astronomii a dokonce i v kosmonautice. Newtonovy pohybové rovnice byly získány jako výsledek experimentů a v podstatě nebylo známo, odkud se berou. Totéž platí pro Maxwellovy rovnice elektromagnetismu, které byly rovněž získány induktivní cestou. To ovšem zanechává určitý pocit neuspokojení.

Chtěli bychom se dopátrat obecného fyzikálního principu, který by vyjadřoval nějakou obecnou vlastnost přírody a z něhož by plynuly rovnice pohybu částic a polí, aniž bychom se museli uchylovat k málo průhlednému pojmu síly. Takové principy existují, jsou to principy variační, a udávají, jak se v přírodě jedna z možností mění ve skutečnost. Lze zmínit známou podmínku stabilní statické rovnováhy soustavy, která říká, že v soustavě částic se ustaví rovnováha tak, aby potenciální energie byla co nejmenší. Vyjadřuje to jakousi ‘úspornost’ přírody, ale také jednoznačnost ve snaze dosáhnout extremálního stavu.

Při genezi těchto přednášek sehrála úlohu právě snaha podat teorii mechaniky a elektrodynamiky z jednotného hlediska založeného na variačních principech. Přitom je klasická teoretická fyzika podávána uceleně tak, aby na ni mohla navazovat fyzika kvantová.

I když se autoři podíleli na formulaci jednotlivých kapitol různou měrou, vznikl celý text na základě těsné vzájemné kritické spolupráce. Byly samozřejmě vzaty v úvahu i zkušenosti a připomínky studentů, kteří obsah knihy v podobě skript po dlouhá léta používali. Na závěr bychom chtěli poděkovat Ing. Petru Novotnému, Ph.D., a recenzentům za cenná doporučení, Ing. Mgr. Michalu Jexovi, Ph.D. za pečlivé provedení obrázků a pracovníkům nakladatelství Karolinum za zodpovědné technické provedení publikace.

V Praze v dubnu 2017 Autoři



Kapitola 1

Úvod

1.1 Co je teoretická fyzika

Teoretická fyzika má za cíl vytvořit souhrnný myšlenkový obraz reálného světa, vlastností hmoty a pohybu na základní, fyzikální úrovni. Vychází přitom z přesvědčení o *materiálnosti* světa a jeho *jednotě*. Zobecněním nahromaděné zkušenosti a experimentálních poznatků, tedy *induktivně* (až *intuitivně*), se snaží formulovat základní fyzikální principy a z nich potom *deduktivním* způsobem, za pomoci matematického aparátu, dospívat v dané konkretní situaci k předpovědím, které je možno porovnávat s výsledky experimentu.

Přesvědčení o materiálnosti světa znamená, že fyzik předpokládá objektivní, na jeho myšlení nezávislou existenci věcí a jevů, z ní své zákony odvozuje a závěry své teorie opět s touto skutečností konfrontuje. Tato konfrontace nebývá snadnou záležitostí. Jeden a týž fakt může být často různě chápán a různě teoreticky vysvětlován. Experiment může svést teorii na scestí a naopak. Teprve souhrn velkého množství experimentálních fakt, která souhlasí s teorií, a zejména úspěšná praktická aplikace teorie, mohou dosvědčit její oprávněnost. Naopak jediný experimentální fakt, který je s teorií prokazatelně v rozporu, dokazuje její nepravdivost, v lepším případě neúplnost.

I když fyzikální teorie je budována, podobně jako teorie matematická, deduktivním, 'axiomatickým' způsobem, tj. logickým odvozováním z omezeného počtu jednoduchých tvrzení, která se již nedokazují, je zde ve srovnání s matematikou podstatný rozdíl. Matematika zkoumá vlastnosti abstraktních myšlenkových struktur a nezabývá se jejich vztahem k reálné skutečnosti. Tak například matematika prozkoumala vlastnosti nejrůznějších abstraktních prostorů, ale rozhodnout o tom, které z těchto vlastností odpovídají *reálnému* prostoru v daných podmínkách, náleží fyzice. Geometrie našeho světa je tedy vlastně součástí fyziky.

Dnes víme, že axiomatické teorie nemohou být ani logicky zcela uzavřeny samy v sobě a fyzika se při budování svých teorií nikdy nerozpakovala opřít o experimentální poznatek jako zásadní argument. Kromě toho, jak fyzika postihuje stále složitější skutečnost, jsou její teorie určitým způsobem hierarchizovány. Přesnější a složitější experimenty mohou být s teorií v rozporu a mohou ji tak vyvracet nebo dokazovat její omezenost na určitý okruh jevů. Právě vyvratitelnost fyzikální teorie je příznakem její vědeckosti (tzv. *princip falzifikace*).

Fyzikální teorie v takovém případě zpravidla nebývá odvržena jako celek, ale stane se mezním případem teorie nové, obecnější (*princip korespondence*). Tak pro rychlosti pohybu malé ve srovnání s rychlostí světla může být relativistická mechanika s dobrou přesností nahrazena mechanikou Newtonovou, pro pohyby, kdy můžeme zanedbat Planckovu konstantu vzhledem k ostatním veličinám téhož fyzikálního rozměru, přechází kvantová fyzika ve fyziku klasickou. Při podrobnějším zkoumání vystihuje fyzika stále jemnější a složitější děje. Přitom je s podivem, že se popis těchto dějů nestává stále chaotičtějším a nepochopitelnějším, že fyzikální teorie neztrácí svou prediktivní sílu. Řečeno Einsteinovými slovy, na přírodě je nejnepochopitelnější to, že je pochopitelná.

Představa o jednotě světa, o jeho jednotné podstatě při vší rozmanitosti jevů, se objevuje kupodivu během celého vývoje přírodovědy. Tak řečtí přírodní filozofové považovali za základ světa vodu (Thales), vzduch (Anaximenes), oheň (Herakleitos), neurčitou substanci *apeiron* (Anaximandros), čtyři živly (Empedokles), číslo (Pythagoras), rozum, *nús* připomínající energii (Anaxagoras).

O jednotě světa nebo alespoň námi pozorovaného vesmíru svědčí jeho chemické složení z týchž prvků, jak ukazují spektra záření vesmírných objektů. Odtud dovozujeme i jednotný původ tohoto vesmíru. Dnešní fyzika řeší otázku podstaty světa na úrovni elementárních částic, leptonů, kvarků a kalibračních částic, a rozeznává čtyři druhy vzájemného působení (interakcí) mezi částicemi: *gravitační, elektromagnetické*, *slabé* a *silné*. Teoreticky i experimentálně se podařilo prokázat, že elektromagnetické a slabé síly jsou projevem jedné a téže *elektroslabé* interakce. Nedávný objev Higgsova bosonu podporuje sjednocení elektroslabých a silných interakcí do *standardního modelu* elementárních částic.

Otázka jednotné podstaty částic a jednotné teorie všech silových polí není však dosud dořešena. Někteří fyzikové nazývají takovou teorii, k níž napínají své úsilí, poněkud provokujícím označením 'teorie všeho' a čelí přitom výtkám z domýšlivosti se strany těch, kteří nemají dost smyslu pro humor.

1.2 Fyzikální soustavy

Máme-li formulovat fyzikální teorii, musíme především přesně vymezit předmět našeho zkoumání, definovat *fyzikální soustavu.* Touto soustavou je koneckonců vždy reálný objekt ve vzájemné interakci se všemi ostatními objekty. Jeho vlastnosti a bohatství vztahů k dalším objektům jsou nevyčerpatelné a nelze je všechny poznat nebo vzít v úvahu. V dané konkretní situaci a pro daný praktický účel jsou však některé vlastnosti podstatné, jiné nepodstatné, a to nám umožňuje nahradit reálný objekt *modelem*, který nese pouze vlastnosti v dané souvislosti podstatné.

Nejjednodušším fyzikálním modelem je 'hmotný bod', částice nebo těleso zbavená všech svých vlastností s výjimkou polohy v prostoru v daném okamžiku a své hmotnosti. Vyšší složitost má soustava konečného počtu hmotných bodů, a dále tuhé těleso, jehož pohyb lze redukovat na pohyb trojice hmotných bodů v neměnných vzájemných vzdálenostech a neležících v jedné přímce. Zajímá nás konfigurace (poloha) dané soustavy a její vývoj v čase. V případě konečného počtu hmotných bodů musíme vědět jak se mění jejich polohové vektory, tj. musíme znát zákon pohybu každého hmotného bodu. Tyto zákony zjistíme řešením *pohybových rovnic.* Jsou to obyčejné diferenciální rovnice a k tomu, abychom našli jejich jednoznačné řešení, musíme znát též počáteční podmínky, tj. polohy a rychlosti všech hmotných bodů v nějakém okamžiku.

Můžeme zkoumat také soustavy nekonečného počtu hmotných bodů, za jaké považujeme například pružné těleso nebo nějaký objem tekutiny (kapaliny, plynu). Zdálo by se nemožné řešit soustavu nekonečného počtu pohybových rovnic pro takové hmotné body. Můžeme však přejít v limitě ke kontinuu a popisovat tyto soustavy jako spojité prostředí. Pak lze jeho konfiguraci určit funkcemi prostorových souřadnic a času, a jejich časový vývoj je řešením parciálních diferenciálních rovnic. K jednoznačnosti řešení těchto rovnic musí být zadány též okrajové (hraniční) podmínky. Podobně jako pro kontinuum lze formulovat i parciální diferenciální rovnice pro pohyb pole, například elektromagnetického nebo gravitačního. Model pole představuje nezávislou fyzikální realitu, kterou nelze převést na mechanické kontinuum.

Konfiguraci soustavy nemusíme určovat jen kartézskými souřadnicemi a vektory v trojrozměrném prostoru, jak je typické například pro Newtonovu mechaniku. Můžeme jej určovat i hodnotami jiných geometrických veličin, které lze experimentálně zjistit. Přitom stačí znát pouze hodnoty *úplného souboru nezávislých veličin* a_k, tj. nejmenšího počtu veličin, které plně určují konfiguraci soustavy v daném okamžiku. Tento počet nazýváme *počet stupňů volnosti.* Pro soustavu N volných hmotných bodů je počet stupňů volnosti roven $s = 3N$, pro tuhé těleso je $s = 6$, pro kontinuum a pro pole je počet stupňů volnosti nekonečný. Jsou-li ovšem hmotné body podrobeny *vazbám*, jako například pohybuje-li se hmotný bod na zemském povrchu, počet stupňů volnosti se snižuje (v daném případě na $s = 2$). Hodnoty veličin a_k se mění v čase; mluvíme o *pohybu soustavy* a časové závislosti $a_k(t)$ určují trajektorie pohybu soustavy. Ty jsou řešením pohybových rovnic se zadanými počátečními podmínkami $a_k(t_0), \dot{a}_k(t_0)$, které udávají stav soustavy v okamžiku $t = t_0$.

Výsledný pohyb bude záviset na vnitřním a vnějším působení (interakcích) v soustavě. Je-li vnější působení na soustavu zanedbatelné, mluvíme o soustavě *izolované* (uzavřené). Pak záleží pouze na vzájemném působení jednotlivých částí soustavy. Jiný důležitý případ nastává tehdy, pohybuje-li se soustava v *neměnných vnějších podmínkách*, které sama neovlivňuje, například v časově konstantním vnějším silovém poli. Jsou-li vnější podmínky proměnné, záleží opět na tom, zda se mění zadaným způsobem, tedy díky vlivům mimo soustavu, nebo zda dochází ke vzájemnému ovlivňování soustavy s okolím. Tento nejsložitější, i když fyzikálně nejreálnější případ pak vede na řešení soustav nelineárních diferenciálních rovnic. V Newtonově mechanice je vzájemné působení popisováno vektorovou veličinou zvanou *síla.* Tento popis však často nebývá nejvhodnější a vyjádření síly v daném konkretním případě může činit potíže. V teoretické fyzice se ukazuje účinnější a také elegantnější popisovat vzájemné působení skalárními funkcemi, jako je například potenciální energie, Lagrangeova či Hamiltonova funkce apod.

1.3 Fyzikální principy

Při výstavbě fyzikální teorie a odvozování pohybových rovnic vycházíme z obecných principů získaných z experimentů. Tyto principy vyjadřují obecné vlastnosti, krásu a symetrie přírody. Nejznámější jsou *zákony zachování*. V izolované mechanické soustavě jsou to zákony zachování mechanické energie, hybnosti, momentu hybnosti a rychlosti těžiště. Tyto zákony lze odvodit z vlastností symetrie prostoru a času a představují celkem 10 konstant, které se během pohybu soustavy nemění. Z matematického hlediska jsou to tzv. *integrály pohybu* a usnadňují řešení pohybových rovnic. V dalších oblastech fyziky se uplatňují i jiné zákony zachování, zejména zákon zachování elektrického náboje, zákon zachování parity, zákony zachování různých kvantových čísel (elektronového, mionového, tauonového aj.), často s poetickými názvy (zákony zachování leptonového náboje, baryonového náboje, podivnosti, půvabu, krásy, pravdy aj.).

Tyto zákony vyjadřují experimentálně potvrzované skutečnosti, že některé děje a reakce v přírodě nemohou probíhat. Tak podle zákona zachování energie nelze sestrojit perpetuum mobile prvního druhu, podle zákona zachování elektrického náboje se elektron nemůže rozpadnout na dva fotony apod. Některé zákony zachování však neplatí univerzálně, ale jen pro určitý druh interakcí. Tak zákon zachování parity, který souvisí s invariancí jevů vůči zrcadlovému zobrazení, obecně platí s výjimkou slabých interakcí, uplatňujících se například při radioaktivní přeměně beta za účasti neutrina. V termodynamice se setkáváme se zákony, které neplatí striktně, ale mají pravděpodobnostní charakter. Tak by se například všechny molekuly plynu v nějaké nádobě mohly samovolně shromáždit v jedné polovině nádoby, ale podle druhé věty termodynamické to neočekáváme, je to nesmírně málo pravděpodobné. Podobně neočekáváme, že nám při hodu kostkou padne milionkrát po sobě šestka.

Jak bylo řečeno, zákony zachování úzce souvisí s vlastnostmi prostoru a času, případně dalších abstraktních fyzikálních prostorů. Jsou pojevem *principů symetrie* (invariance, relativity), které udávají, jaké mohou být transformace prostoru a času, aby se tvar pohybových rovnic fyzikální soustavy nezměnil. Těmito transformacemi se zabývá matematická teorie grup, která hraje důležitou úlohu právě v teorii elementárních částic. Principy symetrie vycházejí z jednoho z nejobecnějších principů přírody, který bychom mohli nazvat *princip dostatečného důvodu*. Pohyb fyzikální soustavy může probíhat mnoha různými možnými způsoby a příroda to také zkouší. Nakonec se však může realizovat jen jeden, za stejných podmínek vždy týž způsob, a musí k tomu být nějaký důvod. Pouze díky tomu je možná existence přírodních zákonů a exaktních věd. Řešení úlohy o pohybu tedy znamená zjistit, který z možných pohybů se za daných podmínek stane skutečností. Přeměna možného ve skutečné, která vlastně probíhá i v našem každodenním životě, je důležitou otázkou filozofickou a zabýval se jí ve starověku už Aristoteles. Možností je vždy mnoho, skutečnost pak ale jen jedna.

Newton kdysi napsal pohybové rovnice hmotných bodů jako postuláty vycházející z experimentů, bez odvození z nějakých obecných principů. V teoretické fyzice odvozujeme tyto rovnice z tzv. *variačních principů*, které zkoumají různé možnoti pohybu a udávají kritéria, podle nichž bude probíhat skutečný pohyb. Tyto principy zkoumá část matematické analýzy zvaná variační počet. Jsou nesmírně krásné a obecné a jak uvidíme, lze je uplatnit nejen v mechanice, ale i v teorii elektromagnetismu a dalších oblastech fyziky. Vycházejí z toho, že určitá veličina charakterizující fyzikální soustavu, která má matematickou podobu tzv. funkcionálu, musí při skutečném pohybu nabývat extremální nebo stacionární hodnoty. Příkladem může být podmínka stabilní statické rovnováhy, která vyžaduje, aby potenciální energie soustavy byla minimální.

1.4 Historický vývoj teoretické fyziky

První fyzikální principy, z nichž vychází teoretická fyzika, se v náznacích objevovaly už ve starověku. Tak **Aristoteles** (384–322 př. n. l.) vyslovil princip, podle něhož síly působící na páce jsou v rovnováze, jsou-li úměrné rychlostem. Připomíná to princip virtuáních posunutí, který mnohem později formuloval **Johann Bernoulli** (1667–1748) a který se stal matematickým východiskem pro řešení úloh o statice. **Archimedes** (287–212 př. n. l.) stanovil podmínky rovnováhy na páce a hydrostatické rovnováhy. **Heron Alexandrijský** v 1. století n. l. formuloval variační princip podle něhož *Pohybující se se snaží pohybovat po dráze, která je vzhledem k prostorové vzdálenosti nejkratší, protože předmět nemá čas na pomalejší pohyb.* Dokázal také, že světlo se při odrazu pohybuje po nejkratší dráze.

Přesto však počátky teoretické fyziky spadají až do 17. století a jsou spojeny s pracemi **Isaaca Newtona** (1643–1727). Newton podal definice základních mechanických veličin a vytvořil také pro teoretickou mechaniku nezbytný matematický aparát, diferenciální a integrální počet. Prvním, přímo zakladatelským dílem teoretické fyziky se tak stala Newtonova *Philosophiae naturalis principia mathematica* z roku 1687. Newton se při formulaci zákonů mechaniky opíral o experimentální poznatky **Galilea Galileiho** (1554–1642) a o zákony Keplerovy.

Johannes Kepler (1571–1630) přitom odvodil své zákony za svého působení v Praze na základě přesných astronomických měření **Tychona Brahe** (1546–1601). V tomto smyslu můžeme tedy dokonce považovat Prahu za rodiště teoretické astronomie a mechaniky.

Již v Newtonově době se rýsoval i alternativní přístup k matematickému popisu mechanického pohybu. Tak velký Newtonův soupeř, německý matematik a filozof **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) prosazoval pro popis pohybu místo síly skalární funkci a volil veličinu mv^2 nazývanou tehdy 'živá síla'. Některé extremální úlohy, například úloha o brachistochroně (křivka, po níž se hmotný bod v tíhovém poli spouští z výše položeného místa na níže položené za nejkratší dobu), si vynutily vytvoření další oblasti matematické analýzy, variačního počtu. Zásluhu o něj mají zejména **Jacob** (1654–1705) a **Johann Bernoulliové** a **Leonhard Euler** (1707–1783). **Jean Le Rond d'Alembert** (1717–1783) formuloval obecný diferenciální princip, který je matematicky ekvivalentní Newtonovým pohybovým rovnicím a umožňuje provést syntézu statiky a dynamiky.

Integrální princip minimální akce, který se stal východiskem tzv. analytické mechaniky, je připisován **Pierrovi Maupertuisovi** (1698–1759), i když k němu dospěli již dříve Leibniz a Euler. **Joseph Louis Lagrange** (1736–1813) rozšířil a vymezil tento princip jako princip stacionární akce a vycházel z něho při své formulaci analytické mechaniky. Jeho dílo *Mécanique analytique* z roku 1788 se stalo dalším mezníkem ve vývoji teoretické mechaniky. Ještě obecnější podobu tomuto principu dal v 19. století irský matematik **William Rowan Hamilton** (1805–1865) a jeho jménem budeme také tento princip nazývat. V poněkud jiné podobě odvodili variační principy pro různé případy pohybu **Carl Friedrich Gauss** (1777–1855), **Heinrich Hertz** (1857–1894) a jiní. Důležitou modifikací je i podoba, kterou dal analytické mechanice **Karl Jacobi** (1804–1851). Hamiltonův-Jacobiho formalismus se ukázal být vhodným východiskem i pro formulaci matematické podoby mechaniky kvantové.

Mimořádnou úlohu ve vývoji fyziky sehrál objev zákona zachování energie, který byl formulován již ve 40. letech 19. století (**Julius Mayer** (1814–1878), **James Joule** (1818–1889) a **Hermann Helmholtz** (1821–1894)). Je jedním z nejobecnějších zákonů zachování, který umožňoval propojit jednotlivé oblasti fyziky a byl postupně přijímán jako základní princip přírody. Studium energetických přeměn i v souvislosti s potřebami technického rozvoje vedlo ke vzniku termodynamiky, s níž do fyziky postupně pronikalo vědomí o úloze náhody a pravděpodobnosti. Druhý termodynamický zákon formuloval **Rudolph Clausius** (1822–1888) v roce 1850. Odtud se postupně odvinula statistická fyzika, zejména v pracích **Ludwiga Boltzmanna** (1844–1906). Boltzmann našel vztah mezi entropií a pravděpodobností stavu, který později sehrál důležitou úlohu v moderní kvantové fyzice a teorii informace.

Vedle mechaniky se od počátku 17. století rozvíjel výzkum elektrických a magnetických jevů. Dovršení našel v pracích **Michaela Faradaye** (1791–1867), všestranného experimentátora, objevitele elektromagnetické indukce. Přestože Faraday neměl hlubší matematickou přípravu, měl vynikající fyzikální intuici, která ho přivedla k představě o elektromagnetickém poli a jeho siločárách. Matematickou podobu dal zákonům elektromagnetismu **James Clerk Maxwell** (1831-1879) v podobě Maxwellových rovnic. Maxwellův spis *Treatise on Electricity and Magnetism* z roku 1873 sehrál v rozvoji teoretické fyziky podobnou úlohu jako kdysi Newtonova Principia.

V průběhu 19. století se fyzika postupně oprošťovala od mechanických modelů elektrických, magnetických a optických jevů, které byly vysvětlovány pomocí různých jemných substancí, fluid a éteru. Stalo se zřejmým, že vedle mechanických soustav, částic a těles je třeba přijmout existenci polí jako jiné fyzikální reality. Tato pole zprostředkují silová působení, elektromagnetická i gravitační, a mohou mít i samostatnou existenci v podobě elektromagnetických, a zřejmě i gravitačních vln. Svědčí o Newtonově hlubokém chápání přírody, když odmítl spekulovat o podstatě přenosu gravitačních sil *Hypotheses non fingo, Hypotézy si nevymýšlím* a přenechal tento problém budoucím pokolením.

Ukázalo se, že Maxwellovy rovnice se nepodřizují Galileiho transformacím mezi inerciálními vztažnými soustavami, ale obecnějším transformacím Lorentzovým (**Hendrik Antoon Lorentz** (1853–1928)). To pak přivedlo **Alberta Einsteina** (1879–1955), který se shodou okolností narodil právě v roce Maxwellova úmrtí, k objevu speciální teorie relativity. Za okamžik jejího vzniku se považuje rok 1905, kdy se objevila Einsteinova práce *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*. Speciální teorie relativity zobecnila Newtonovu mechaniku i na pohyby probíhající rychlostmi blízkými rychlosti světla a propojila mechaniku s elektromagnetismem. Pohybové rovnice relativistické mechaniky i rovnice Maxwellovy lze odvodit, jak uvidíme, na základě jednotného variačního principu a popsat tak chování soustavy nabitých částic v elektromagnetickém poli. Einstein později (1915) ve své obecné teorii relativity podal i výklad gravitačního pole jako důsledek zakřivení prostoročasu.

Studium spektra rovnovážného záření přivedlo **Maxe Plancka** (1858–1947) v roce 1899 ke kvantové hypotéze, k poznání o kvantování energie a o přetržitosti přírodních jevů. Tím začalo nové období rozvoje teoretické fyziky, které vyvrcholilo ve 20. letech 20. století pracemi **Erwina Schrödingera** (1887–1961), **Wernera Heisenberga** (1901–1976) a **Maxe Borna** (1882–1970). V nich byl vytvořen matematický aparát kvantové mechaniky, s jejíž pomocí se podařilo vysvětlit vlastnosti a chování atomů a molekul a dát tak teoretický základ i chemii.

Dvacáté století se stalo stoletím fyziky kvantové a relativistické, v nichž našla klasická mechanika a elektrodynamika své zobecnění. Jak kvantová, tak relativistická fyzika přivedla k řadě nových zdánlivě paradoxních jevů, které se vymykají naší představivosti a běžné denní zkušenosti, ale jsou v dokonalé shodě s fyzikálními experimenty. Přitom kvantová a relativistická fyzika pramení z různých východisek a dlouhou dobu mezi nimi nebyla dostatečná shoda. Pracemi **Paula Diraca** (1902–1984), **Richarda Feynmana** (1918–1988) a dalších se podařilo překlenout tento rozpor a vytvořit kvantovou elektrodynamiku, jejíž předpovědi byly experimentálně ověřeny s vynikající přesností. V dnešní době se úsilí teoretických fyziků soustřeďuje na ověřování tzv. *standardního modelu* elektroslabých a silných interakcí elementárních částic. Vzdáleným cílem je vytvoření jednotné teorie všech přírodních interakcí. K tomu je třeba vybudovat i kvantovou teorii gravitace, která ovšem souvisí se vznikem, vývojem a děním ve vesmíru. Podrobnější údaje o vzniku a vývoji fyziky včetně teoretické lze najít např. v [24].

Kapitola 2

Newtonova mechanika

2.1 Newtonovy zákony

Newtonova mechanika, která představuje první fyzikální teorii, byla vytvořena především k popisu pohybu nebeských těles jako soustavy volných hmotných bodů. Interakce mezi jednotlivými hmotnými body je dána *zákonem silového působení*, v daném případě Newtonovým zákonem gravitačním. Takto vyjádřené síly pak vystupují v Newtonových pohybových rovnicích, jejichž řešením najdeme zákon pohybu soustavy, tj. změnu polohy jednotlivých částic v čase. Jako míra množství jejich pohybu slouží součin hmotnosti a rychlosti částic, tedy veličina, kterou nazýváme hybnost. Síla a hybnost jsou typickým příkladem vektorové fyzikální veličiny a Newtonova mechanika je proto mechanikou vektorovou.

Newtonova mechanika je založena na třech základních zákonech, vlastně axiomech, které Newton postuloval na základě zkušenosti:

1. Zákon setrvačnosti:

Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud a dokud není vtištěnými silami donuceno svůj stav změnit.

2. Zákon síly:

Změna pohybu je úměrná hybné vtištěné síle a nastává ve směru přímky, podél níž síla působí.

3. Zákon akce a reakce:

Proti akci vždy existuje stejně velká reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou si vždy rovna a míří na opačné strany.

První Newtonův zákon byl vlastně formulován již Galileim a úzce souvisí s pojmem **inerciální vztažné soustavy (systému)**. Pod pojmem ‘vtištěných’ sil se rozumí tzv. **síly pravé**, tj. takové, při nichž jedno těleso působí na druhé; můžeme tedy ukázat na zdroj těchto sil. Newtonův termín ‘těleso’ (latinsky ‘corpus’) interpretujeme dnes jako tzv. **hmotný bod**, tedy objekt, který je charakterizován pouze svou polohou (trojicí kartézských souřadnic) a hmotností. Pro stručnost, pokud nemůže dojít k záměně, budeme v mechanice místo výrazu hmotný bod někdy používat termín **částice**. Zákon setrvačnosti pak tvrdí, že částice, na niž nepůsobí pravé síly (**bezsilová částice**), nebo jsou-li tyto pravé síly vyrovnány, se pohybuje rovnoměrně přímočaře nebo zůstává v klidu.

Pohyb částice musíme ovšem vždy pozorovat v určité vztažné soustavě. Pokud se v této soustavě zákon setrvačnosti (inercie) experimentálně potvrzuje, nazýváme tuto soustavu **inerciální**. Z čistě logického hlediska je to ovšem kruh – inerciální soustava je ta, v níž platí zákon inercie a zákon inercie platí v inerciální soustavě. K určení inerciální soustavy stačí tři vhodně vybrané bezsilové částice a každá další bezsilová částice se v takové soustavě bude pohybovat rovnoměrně přímočaře. Způsob výběru těchto tří částic udává **Langeova věta** (Ludwig Lange 1863–1936):

Inerciální soustavou je každá soustava souřadnic, vůči níž jsou dráhy tří hmotných bodů (které neleží v jedné přímce) vypuštěných ze stejného bodu prostoru a pak ponechaných sobě samým, vesměs přímočaré. Vzhledem k inerciální soustavě je pak i dráha každého čtvrtého sobě samému ponechaného bodu přímočará.

K tomu je ovšem třeba přiřadit i inerciální časovou stupnici, tj. takovou, vzhledem k níž hmotný bod ponechaný sám sobě urazí na své dráze za stejnou dobu stejnou vzdálenost.

Pokud vztažná soustava nebude inerciální, budou v ní pohyb částic ovlivňovat tzv. **setrvačné** (nepravé) **síly**, které nemají svůj zdroj v jiných částicích nebo tělesech. Je otázkou, odkud se tyto síly berou. Newton si dobře uvědomoval hluboký smysl svého zákona setrvačnosti a i když ještě nepoužíval pojem inerciální vztažné soustavy, domníval se, že pohyb je třeba vztahovat k nehybnému, absolutnímu prostoru a dobu k nezávisle plynoucímu času. Takový absolutní prostor bez těles má poněkud chimérický charakter, a proto se Ernst Mach (1838–1916) pokusil hledat původ setrvačných sil v celkovém rozložení částic ve vesmíru (*Machův princip*).

Zákon setrvačnosti předpokládá, že existuje alespoň jedna inerciální vztažná soustava. Nakolik je tento předpoklad splněn, je otázkou experimentálního ověření. Víme, že v praxi užívané vztažné soustavy (spojené se Zemí, se Sluncem a rovinou ekliptiky, se stálicemi) splňují požadavek inerciálnosti pouze přibližně. S největší přesností za inerciální považujeme soustavu spojenou se systémem vzdálených galaxií, ale je možné, že dokonale inerciální vztažná soustava vůbec neexistuje. Bylo by lákavé spojit vztažnou soustavu s pozorovaným vesmírem jako celkem; problém je ovšem v tom, že tento vesmír je podle našich dosavadních znalostí unikátní a jeho případný pohyb nemáme vůči čemu vymezit.

Matematická vsuvka 1.
Vektory a Einsteinovo sumační pravidlo

Vektorové veličiny v trojrozměrném eukleidovském prostoru chápeme jako uspořádané trojice (reálných) čísel, které se při přechodu od jedné kartézské soustavy souřadnic k druhé transformují lineárními ortogonálními transformacemi stejně jako polohový vektor (nazývaný často nehezky 'rádiusvektor') $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ tvořený třemi kartézskými souřadnicemi. Obecný vektor $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$ můžeme zapsat pomocí jednoho indexu (např. i, j, k apod.), který nabývá hodnot 1,2,3. Zkráceně tedy $\boldsymbol{a} = a_i$. Ve vektorové algebře je zavedeno sčítání vektorů vztahem $c_i = a_i + b_i$ a násobení vektoru číslem $b_i = k a_i$ Tyto operace splňují komutativní, asociativní a distributivní zákony. Dále je definován vektor nulový a ke každému vektoru vektor opačný. Taková množina vektorů se pak nazývá *vektorový prostor*.

Můžeme si ho názorně představit také jako prostor orientovaných úseček ('šipek') a jeho souřadnice a_i jako orientované projekce těchto úseček do kartézských os. Sčítání takových vektorů je pak definováno pravidlem úhlopříčky v rovnoběžníku tvořeném těmito úsečkami. Vektory tedy popisují fyzikální veličiny, které jsou charakterizovány kromě velikosti též směrem.

Zavedeme tzv. *Einsteinovo sumační pravidlo* obvyklé v teoretické fyzice: index, který se v některém členu vyskytuje dvakrát, se automaticky považuje za sčítací. Tak $a'_i = \alpha_{ij} a_j$ je zkrácený zápis pro $a'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} a_j$. Podobně

$$a_i a_i = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = |\boldsymbol{a}|^2 = a^2. \tag{2.1}$$

Všimněte si, že tato veličina už není vektorem, není charakterizována indexem a představuje druhou mocninu velikosti vektoru $\boldsymbol{a}$, tedy číslo. Poznamenejme, že pro sčítací index můžeme použít libovolné písmeno, pokud se toto písmeno v daném členu už neobjevuje. Dále definujeme *Kroneckerův symbol* δ_{ij} jako

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro}\, i = j \\ 0 & \text{pro}\, i \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Lineární transformace vektorů

$$a'_i = \alpha_{ij}\ a_j \tag{2.3}$$

je určena transformační maticí α_{ij}. Pokud její koeficienty splňují podmínku

$$\alpha_{ik}\ \alpha_{ij} = \delta_{kj}\ , \tag{2.4}$$

nazývá se tato transformace *ortogonální*. Příkladem takové transformace může být pootočení souřadných os v prostoru. Má tu vlastnost, že ponechává beze změny euklidovské vzdálenosti bodů a úhly mezi přímkami. Budou-li polohové vektory jednoho z bodů x_i a druhého y_i, platí pro druhou mocninu vzdálenosti mezi body

$$(x'_i - y'_i)(x'_i - y'_i) \ = \ \alpha_{ij}\alpha_{ik}(x_j - y_j)(x_k - y_k) = (x_j - y_j)(x_j - y_j).$$

Inverzní transformaci dostaneme tak, že vztah (2.3) vynásobíme α_{ik} a vysčítáme přes i:

$$\alpha_{ik}\ a'_i = \alpha_{ik}\ \alpha_{ij}\ a_j = \delta_{kj}\ a_j = a_k\ .$$

Tento vztah můžeme přepsat též jako

$$a_j = \alpha_{ij}\ a'_i \quad \text{nebo} \quad a_i = \alpha_{ji} a'_j\ . \tag{2.5}$$

Porovnáním s (2.3) vidíme, že inverzní transformace je určena transponovanou transformační maticí.

Podle pravidel násobení matic můžeme zapsat vztah (2.4) ve tvaru

$$A^T A = I, \tag{2.6}$$

kde A je matice koeficientů α_{ij}, A^T je matice transponovaná a I je jednotková matice. Vzhledem k tomu, že $|A^T A| = |A|^2 = 1$, vidíme, že determinant matice A může nabývat hodnot $|A| = \pm 1$. Hodnotě $+1$ odpovídají tzv. *vlastní ortogonální transformace*, hodnotě -1 *nevlastní ortogonální transformace.* Nevlastní ortogonální transformace mají tu vlastnost, že pravotočivé kartézské soustavy souřadnic přecházejí v levotočivé a naopak. Typickou nevlastní ortogonální transformací je inverze os, jejíž matice $A = -I$.

Vektory, které při inverzi souřadných os mění znaménka svých souřadnic na opačná (např. polohový vektor $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ nebo vektor rychlosti $\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$) se nazývají *vektory polární.* Naproti tomu vektory, které při inverzi souřadných os znaménka svých souřadnic nemění, se nazývají *axiální* nebo též *pseudovektory* (např. moment hybnosti a každý vektorový součin dvou polárních vektorů).

Při studiu jakýchkoli transformací nás vždy zajímá otázka invariantů, chceme vědět, které veličiny se při provedené transformaci nemění. U vektorů jsou takovými invarianty zřejmě velikost (absolutní hodnota) vektoru, tj. délka vektorové úsečky $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_i a_i}$, a také *skalární součin* dvou vektorů:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \delta_{ij} a_i b_j = a_i b_i \tag{2.7}$$

(index u těchto výrazů po sečtení vymizí). Tyto invarianty nazýváme *skaláry.* Skalár je vždy vyjádřen jedním číslem (např. hmotnost, elektrický náboj aj.). Pokud by taková veličina měnila při nevlastních transformacích znaménko, šlo by o *pseudoskalár* (např. skalární součin polárního a axiálního vektoru).

Přesvědčte se o tom, že jsou-li směry dvou vektorových úseček vzájemně kolmé, je skalární součin těchto vektorů roven nule.

Lze dokázat, že *existuje-li jedna inerciální vztažná soustava, existuje jich nekonečný počet.* Je-li soustava S, kterou budeme považovat za nehybnou (laboratorní), definovaná kartézskými osami souřadnic $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ inerciální, bude zrychlení hmotného bodu, na nějž nepůsobí pravé síly, nulové:

$$\ddot{x}_j = a_j = 0\ , \quad j = 1,\ 2,\ 3\ . \tag{2.8}$$

(časovou derivaci označujeme spolu s Newtonem tečkou).

Přejdeme nyní k nové vztažné soustavě S' pomocí tzv. *obecné Galileiho transformace*

$$x'_i = \alpha_{ij}\ (x_j - X_j)\ . \tag{2.9}$$

Zde α_{ij} jsou konstanty charakterizující natočení soustavy S' vůči S a X_j jsou souřadnice počátku O' v S. Počátek O' se přitom pohybuje v čase rovnoměrně přímočaře:

$$X_j = X_j^0 + V_j t\ , \tag{2.10}$$

kde X_j^0, V_j jsou konstanty. Předpokládáme, že čas plyne ve všech vztažných soustavách stejně, že je univerzální a absolutní. V nerelativistické fyzice čas má tedy charakter *parametru.* Potom zřejmě

$$v'_i = \dot{x}'_i = \alpha_{ij}\ (\dot{x}_j - V_j) \tag{2.11}$$

a

$$a'_i = \ddot{x}'_i = \alpha_{ij}\ \ddot{x}_j = \alpha_{ij}\ a_j\ . \tag{2.12}$$

Z (2.12) plyne, že je-li zrychlení v soustavě S nulové, bude nulové i v soustavě S' a ze zpětné transformace dostaneme, že toto tvrzení platí i naopak. Všechny soustavy vázané s inerciální soustavou S transformací (2.9) jsou tedy také inerciální a tvrzení je dokázáno.

Zvláštním případem obecné transformace (2.9) je *speciální Galileiho transformace*, která předpokládá, že odpovídající (stejnojmenné) osy obou soustav souřadnic S a S' jsou souhlasně rovnoběžné, pohyb soustavy S' probíhá v kladném směru osy x konstantní rychlostí V vzhledem k soustavě S a počátky obou soustav O a O' v jednom okamžiku splývají (viz obr. 6.1). Tento okamžik můžeme zvolit za počáteční $t = 0$. V Newtonově mechanice plyne čas ve všech vztažných soustavách stejně. Máme tedy transformaci

$$x' = x - Vt \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = t \ . \tag{2.13}$$

Zpětnou transformaci dostaneme snadno, uvážíme-li, že soustava S se pohybuje vůči soustavě S' rychlostí $-V$. Při přechodu od jedné inerciální soustavy k druhé můžeme transformace (2.13) používat bez újmy na obecnosti (osu x můžeme vždy zvolit ve směru vzájemného pohybu soustav a ostatní osy natočit souhlasně rovnoběžně).

Druhý Newtonův zákon formuluje myšlenku, že síla není příčinou pohybu (jak by se na první pohled zdálo), nýbrž příčinou *změny pohybu.* Za míru pohybu zde bereme vektor hybnosti, který je pro hmotný bod hmotnosti m pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ roven $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. Označíme-li vektor síly jako $\boldsymbol{F}$, můžeme psát

$$\boldsymbol{F} = k \ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.14}$$

Je-li hmotnost m konstantní, můžeme zákon (2.14) vyjádřit pomocí zrychlení $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{a}$ ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = k \ m \ \boldsymbol{a}. \tag{2.15}$$

Na první pohled by se mohlo zdát, že druhý Newtonův zákon vlastně definuje sílu a není tedy zákonem. Aby tomu tak nebylo, je třeba určit sílu nezávisle, tedy udat *zákon silového působení (interakce)* mezi dvěma částicemi. Toho si byl Newton vědom a doplnil své pohybové zákony o **zákon gravitační**. Podle tohoto zákona částice o hmotnosti m_1 a polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ působí na částici o hmotnosti m_2 a polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_2$ přitažlivou gravitační silou

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_1 \ m_2}{r^2} \ \frac{\boldsymbol{r}}{r} \ , \tag{2.16}$$

kde $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ a gravitační konstanta $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.

Hmotnost částice označená symbolem m vystupuje jednak ve vztahu mezi silou a zrychlením (2.15), jednak v gravitačním zákonu (2.16). Newton si uvědomoval, že odnikud neplyne, že by tyto dvě veličiny označené týmž symbolem musely být totožné (nebo alespoň vzájemně úměrné) a že je nutno to experimentálně ověřit. V prvním případě vystupuje hmotnost částice jako míra její setrvačnosti (*hmotnost setrvačná*), která udává, jak velké síly je třeba k tomu, aby bylo částici uděleno dané zrychlení. Ve druhém případě je hmotnost měřítkem gravitačního působení mezi částicemi, tedy vystupuje jako jakýsi 'náboj' hmoty (*hmotnost gravitační*).

Hmotnost je jednou ze základních vlastností hmoty, její existence je experimentální fakt a není možno ji definovat pomocí jednodušších pojmů. Je však možno a nutno udat způsob, jak hmotnost měřit, a ověřit vztah mezi hmotností setrvačnou a gravitační. Dávná zkušenost i důmyslné úvahy a experimenty přivedly Galileiho k závěru, že všechna tělesa, lehká i těžká, nezávisle na jejich chemickém složení, padají ve vakuu se stejným zrychlením. Odtud plyne i poznatek, že doba kyvu kyvadla nezávisí na jeho hmotnosti a Newton tuto skutečnost ověřoval přesnými experimenty. To svědčí o vzájemné úměrnosti setrvačné a gravitační hmotnosti. Zvolíme-li vztah (2.15) jako výchozí pro volbu jednotky hmotnosti a položíme v něm konstantu $k = 1$, musíme gravitační konstantu ve vztahu (2.16) zjistit experimentálně. To provedl s vynikající přesností v roce 1798 Henry Cavendish (1731–1810) pomocí torzních vah. Úměrnost setrvačné a gravitační hmotnosti umožňuje v praxi určovat hmotnost vážením. Je ověřena s přesností, kterou umožňují fyzikální měření, a přivedla Einsteina k formulaci tzv. *principu ekvivalence.* Blíže se o něm zmíníme v odstavci 9.2 pojednávajícím o obecné teorii relativity.

Gravitační síly mezi dvěma částicemi, podobně jako elektrostatické síly mezi dvěma bodovými náboji, jsou příkladem sil *centrálních* a *izotropních*, tj. sil, které míří podél spojnice interagujících částic a nezávisí na vybraném směru v prostoru. Jejich velikost je funkcí pouze vzdálenosti částic. Jsou proto invariantní vůči Galileiho transformaci a Newtonův zákon síly tak má stejný tvar ve všech inerciálních vztažných soustavách.

Síla a hybnost jsou obecně funkcemi času a v druhém Newtonově zákonu je uvažujeme v témž okamžiku. Předpokládáme, že změna síly má za následek *okamžitou* změnu hybnosti. Newtonova mechanika chápe interakci jako *actio in distans*, okamžité silové působení na dálku, bez zprostředkujícího činitele (signálu). Nebere v úvahu konečnou rychlost šíření interakce. Newton odmítl koncepce tehdejší přírodní filozofie o pohybu planet působením éterových větrů a vírů, jak si je představoval Descartes, a meziplanetární prostor 'vyprázdnil'. Přitom zároveň odmítl vytvářet spekulace a hypotézy o podstatě gravitačního působení.

Třetí Newtonův zákon umožňuje přejít od mechaniky jedné částice k mechanice soustavy částic. Tento zákon přitom neplatí pro libovolné síly (neplatí například pro síly mezi mezi pohybujícími se elektrickými náboji). Souvisí také s okamžitou rychlostí šíření interakce, neboť předpokládá, že se vznikem nebo zánikem akce okamžitě vzniká či zaniká i reakce. Jestliže Newtonův zákon setrvačnosti a zákon síly vycházely už z poznatků Galileiho, je zákon akce a reakce původní Newtonův přínos.

V Newtonově mechanice se dále uplatňuje *princip superpozice*. Síly působící na částici se strany více částic se vektorově sčítají a vzájemně se neovlivňují. Newtonova mechanika je tedy teorie lineární. Všechny tři Newtonovy zákony platí v téže podobě ve všech inerciálních vztažných soustavách spjatých vzájemně Galileiovými transformacemi (jsou galileiovsky invariantní). Odtud plyne **Galileiho princip relativity**:

Všechny mechanické děje probíhají ve všech inerciálních vztažných soustavách spjatých Galileiovými transformacemi podle stejných zákonů. Experimentálním zkoumáním mechanických dějů nelze tyto inerciální vztažné soustavy navzájem odlišit.

Z matematického hlediska Newtonova mechanika soustavy N částic vyžaduje řešit $3N$ obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu:

$$m_\alpha \, \ddot{x}_{\alpha i}(t) = F_{\alpha i} \; . \tag{2.17}$$

Index $\alpha = 1, 2, \ldots, N$ čísluje jednotlivé částice, $i = 1\ , 2\ , 3$ udává souřadnice částic. Aby tato soustava rovnic měla jednoznačné řešení, musíme znát $6N$ *počátečních podmínek*

$$x_{\alpha i}(t_0) = x^0_{\alpha i}, \quad \dot{x}_{\alpha i}(t_0) = v^0_{\alpha i} \; , \tag{2.18}$$

tj. polohy a rychlosti všech částic v daném okamžiku t_0. Pak je konfigurace soustavy určená $x_{\alpha i}(t)$, $\dot{x}_{\alpha i}(t)$ v libovolném okamžiku minulém či budoucím jednoznačně dána. Newtonova mechanika je tedy v tomto matematickém smyslu přísně deterministická, není v ní místo pro náhodu. Schopnost Newtonovy mechaniky přesně předvídat vzájemnou polohu nebeských těles, zatmění a průchody periodických komet, a dokonce vypočítat polohy dosud neznámých těles (planetky, Neptun) působila na současníky velkým dojmem a upevňovala důvěru ve vědecké poznání. Teprve moderní fyzika se vymanila z úzkého rámce mechanistického determinismu.

Souhrnně můžeme říci, že Newtonova mechanika vznikla za určitých historických podmínek především ke studiu naší planetární soustavy, tj. izolované soustavy částic vzájemně interagujících gravitačními silami závisejícími na vzdálenostech podle Newtonova gravitačního zákona a pohybujících se nepříliš velkými rychlostmi (ve srovnání s rychlostí světla). Vyjdeme-li za rámec těchto předpokladů a budeme-li uvažovat například síly závislé na rychlostech částic, síly vazbové, které pohyb nejrůznějším způsobem omezují, síly elektromagnetické, které mohou být i necentrální, neizotropní a nevyvolávají okamžitou reakci, síly tření spojené s disipací energie, narazíme na obtíže, které nás přinutí hledat obecnější východiska teorie a adekvátnější matematický aparát, než nám poskytuje Newtonův formalismus. Především získáme pocit, že pojem síly není možná nejvhodnější k popisu interakce mezi částicemi a že by bylo lépe založit mechaniku na jiných principech než jsou Newtonovy vektorové zákony sil.

Speciální druhy sil

Uvažujme například *síly závislé určitým způsobem na rychlostech částic.* Předpokládejme, že pravé síly mezi částicemi v určité konkretní inerciální soustavě S jsou dány vztahy

$$F_{\alpha\beta i} = (x_{\beta i} - x_{\alpha i}) f_{\alpha\beta} \; , \tag{2.19}$$

kde $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ je síla, kterou částice β působí na částici α a $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$. Jde tedy o síly splňující zákon akce a reakce. Nechť konkretně

$$\begin{aligned} f^{(1)}_{\alpha\beta} &= e_\alpha e_\beta \dot{x}_{\alpha i} \dot{x}_{\beta i} \varphi(r_{\alpha\beta}), \\ f^{(2)}_{\alpha\beta} &= \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta (\dot{x}_{\beta i} - \dot{x}_{\alpha i})(\dot{x}_{\beta i} - \dot{x}_{\alpha i}) \chi(r_{\alpha\beta}), \\ f^{(3)}_{\alpha\beta} &= \eta_\alpha \eta_\beta (\dot{x}_{\beta i} - \dot{x}_{\alpha i})(x_{\beta i} - x_{\alpha i}) \psi(r_{\alpha\beta}), \end{aligned} \tag{2.20}$$

kde $r_{\alpha\beta} = \sqrt{(x_{\beta i} - x_{\alpha i})(x_{\beta i} - x_{\alpha i})}$ a e_α, ε_α ,η_α jsou konstanty. Vyjádříme složky těchto sil v libovolné kartézské soustavě S' a zjistíme, které z těchto systémů jsou rovnocenné s inerciální soustavou S.

Přejdeme nyní k nové kartézské soustavě S' pomocí obecné transformace typu (2.9), kde však α_{ij}, $x_j(O')$ jsou obecnými funkcemi času:

$$x'_i = \alpha_{ij} \; (x_j - x_j(O')) \; , \quad x_i = \alpha_{ji} \; (x'_j - x'_j(O)) \; . \tag{2.21}$$

Zřejmě

$$x'_{\beta i} - x'_{\alpha i} = \alpha_{ij}(x_{\beta j} - x_{\alpha j}) \quad \text{a také} \quad r'_{\alpha\beta} = r_{\alpha\beta} \; . \tag{2.22}$$

bez omezení na veličiny $\alpha_{ij},\ x_j(O')$. Protože se pravé síly transformují jako vektory,

$$F'_i = \alpha_{ij} F_j \quad , \tag{2.23}$$

dostaneme z (2.19) vynásobením koeficienty α_{ij} vztah

$$F'_{\alpha\beta i} = \alpha_{ij}(x_{\beta j} - x_{\alpha j}) f_{\alpha\beta} = (x'_{\beta i} - x'_{\alpha i}) f_{\alpha\beta} \ . \tag{2.24}$$

Zbývá tedy vyjádřit $f_{\alpha\beta}$ v soustavě S'. Derivováním druhého ze vztahů (2.21) dostaneme

$$\dot{x}'_i = \alpha_{ji}(\dot{x}'_j - \dot{x}'_j(O)) + \dot{\alpha}_{ji}(x'_j - x'_j(O)) \ . \tag{2.25}$$

Dosazením do $f^{(1)}_{\alpha\beta}$ dostaneme vzorec téhož tvaru jako v soustavě S, tj.

$$f^{(1)}_{\alpha\beta} = e_\alpha e_\beta \alpha_{ji} \dot{x}'_{\alpha j} \alpha_{ki} \dot{x}'_{\beta k} \varphi(r_{\alpha\beta}) = e_\alpha e_\beta \dot{x}'_{\alpha i} \dot{x}'_{\beta i} \varphi(r_{\alpha\beta}) \tag{2.26}$$

pouze tehdy, když $\dot{\alpha}_{ji} = 0$ a $\dot{x}'_j(O) = 0$.

Z toho plyne, že při existenci sil s $f_{\alpha\beta} = f^{(1)}_{\alpha\beta}$ by byly proti ostatním význačné ty soustavy, které jsou vůči konkretní inerciální soustavě S v klidu. Mohli bychom je označit jako absolutně klidné. Galileiho princip relativity by v tomto případě neplatil. Obdobný postup v případě $f_{\alpha\beta} = f^{(2)}_{\alpha\beta}$ ukazuje, že tvar zákona síly se zachová jen při $\dot{\alpha}_{ij} = 0$. Pohyb počátku O vůči S' (nebo O' vůči S) může však být i zrychlený. Poslední zákon síly s $f_{\alpha\beta} = f^{(3)}_{\alpha\beta}$ je konečně invariantní vůči všem ortogonálním transformacím (2.21). Lze se o tom přesvědčit, použijeme-li obratu ($\boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta$)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{r}_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} r^2_{\alpha\beta}\right) = \dot{r}_{\alpha\beta} r_{\alpha\beta} \quad .$$

Z hlediska tohoto zákona by tedy byly všechny kartézské soustavy zcela rovnoprávné, podobně jako např. z hlediska Newtonova zákona gravitačního.

Vzorce pro síly v této úloze jsou sice uměle zkonstruovány, ale nejsou docela vymyšlené. Podobné členy se totiž vyskytují v přibližných vzorcích pro síly, jimiž na sebe působí pohybující se bodové elektrické náboje. Vidíme tedy, že Galileiho princip nemá obecnou platnost a že existují síly závislé na rychlosti, které vyžadují zobecnění tohoto principu, mají-li zůstat všechny inerciální vztažné soustavy rovnoprávné.

2.2 Setrvačné síly

Jestliže se vztažná soustava pohybuje vzhledem k nějaké inerciální soustavě se zrychlením, je *neinerciální*. Provedeme-li transformaci vektoru zrychlení do neinerciální soustavy, objeví se v Newtonově zákoně (2.15) nové členy, které označujeme jako *setrvačné síly*. Tyto síly nemají svůj zdroj v působení nějakých určitých těles a nazýváme je proto též síly 'zdánlivé', 'nepravé'.

Bude-li se tedy vztažná soustava S' pohybovat vůči soustavě S (na rozdíl od Galileiho transformace (2.9)) *nerovnoměrným translačním pohybem* $\boldsymbol{X}(t)$, můžeme osy obou soustav S a S$'$ zvolit souhlasně rovnoběžnými a z transformace

$$x'_i = x_i - X_i(t) \tag{2.27}$$

dostaneme

$$v'_i = \dot{x}'_i = v_i - V_i(t), \qquad a'_i = \dot{v}'_i = a_i - A_i(t), \tag{2.28}$$

kde $V_i(t) = \dot{X}_i(t)$, $A_i(t) = \dot{V}_i(t)$ jsou funkcemi času. V neinerciální vztažné soustavě S' můžeme tedy zapsat Newtonovu pohybovou rovnici ve vektorovém tvaru

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A}. \tag{2.29}$$

Vedle výslednice pravých sil $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ se v rovnici objevil nový člen odpovídající *translační setrvačné síle*

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{tr}} = -m\boldsymbol{A}, \tag{2.30}$$

která není vyvolávána nějakým konkretním tělesem. S touto silou se běžně setkáváme při zpomalování nebo zrychlování dopravních prostředků.

Bude-li dále kartézská soustava souřadnic S' vzhledem k soustavě S vykonávat *časově proměnnou rotaci kolem daného bodu*, můžeme bez újmy na obecnosti ztotožnit počátky obou soustav O a O'. Ortogonální transformace souřadnic (2.3) pak vede na transformaci souřadnic pohybující se částice

$$x'_i(t) = \alpha_{ij}(t) x_j(t). \tag{2.31}$$

Ve vektorovém zápisu ovšem částice má radiusvektor $\boldsymbol{r}(t)$, jehož složky v soustavách S a S' jsou $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $(x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$. Nyní je naším cílem určit zrychlení $\boldsymbol{a}'(t)$ částice v rotující neinerciální soustavě S'.

K tomu nejprve dokážeme vztah mezi časovými derivacemi složek nějakého obecného časově proměnného vektoru $\boldsymbol{b}(t)$ v soustavách S a S', který zapíšeme symbolicky ve vektorovém tvaru

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}t}\right)_S + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{2.32}$$

Označují-li $b_j(t)$ a $b'_i(t)$ složky vektoru $\boldsymbol{b}(t)$ v soustavách S a S', platí ortogonální transformace (2.3) ve tvaru

$$b'_i(t) = \alpha_{ij}(t) b_j(t). \tag{2.33}$$

Při derivaci podle času se uplatní pravidlo derivace součinu

$$\frac{\mathrm{d}b'_i(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha_{ij}(t)\frac{\mathrm{d}b_j(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\alpha_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} b_j(t). \tag{2.34}$$

Při porovnání se symbolickým vektorovým vztahem (2.32) je zřejmé, že $\mathrm{d}b'_i(t)/\mathrm{d}t$ jsou složky vektoru $(\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}t)_{S'}$ v soustavě S' a $\alpha_{ij}(t)\mathrm{d}b_j(t)/\mathrm{d}t$ jsou složky vektoru $(\mathrm{d}\boldsymbol{b}/\mathrm{d}t)_S$, také v soustavě S'. Zbývající člen je pak určen derivací transformační matice $A(t) = (\alpha_{ij}(t))$ podle času. Vzhledem k tomu, že tato matice musí splňovat relace ortogonality (2.4), (2.6)

$$\alpha_{ik}(t)\alpha_{jk}(t) = \delta_{ij}, \qquad A(t)^T A(t) = I,$$

pro její derivaci podle času $\dot{A}(t) = (\dot{\alpha}_{ij}(t))$ platí $\dot{\alpha}_{ik}(t)\alpha_{jk}(t) + \alpha_{ik}(t)\dot{\alpha}_{jk}(t) = 0$. Označíme-li

$$\gamma'_{ij}(t) = \dot{\alpha}_{ik}(t)\alpha_{jk}(t),$$

vidíme, že matice $(\gamma'_{ij}(t))$ je antisymetrická, $\gamma'_{ij}(t) = -\gamma'_{ji}(t)$. Využijeme-li relací ortogonality (2.4), můžeme psát

$$\dot{\alpha}_{ij}(t) = \gamma'_{ik}\alpha_{kj}(t).$$

Poslední člen (2.34) je tedy roven

$$\frac{\mathrm{d}\alpha_{ij}(t)}{\mathrm{d}t} b_j(t) = \gamma'_{ik}\alpha_{kj}(t) b_j(t). \tag{2.35}$$

Podle Einsteinovy konvence se sčítá přes oba indexy $k = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$. Protože indexy i, k odpovídají souřadným osám soustavy S', píšeme $\gamma'_{ik}(t)$.

Matematická vsuvka 2.
Levi-Civitův symbol a úhlová rychlost

Ukážeme si, jak popsat okamžitou úhlovou rychlost rotace. Vyjdeme z infinitesimálního (nekonečně malého) pootočení soustavy souřadnic. Kartézské souřadnice se transformují podle vztahu platného do 1. řádu v ε

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j = (\delta_{ik} + \varepsilon\gamma_{ik}) x_k = x_i + \varepsilon\gamma_{ik} x_k \ . \tag{2.36}$$

Z podmínky ortogonality rotační matice α_{ij} (2.4) vyplývá

$$(\delta_{ik} + \varepsilon\gamma_{ik})(\delta_{ij} + \varepsilon\gamma_{ij}) = \delta_{kj} \ , \tag{2.37}$$

takže do prvního řádu v ε musí platit

$$\gamma_{jk} + \gamma_{kj} = 0. \tag{2.38}$$

Matice (γ_{jk}) je tedy antisymetrická a má pouze tři nezávislé prvky, které cyklicky označíme jako $\Omega_1 = \gamma_{23}$, atd.:

$$(\gamma_{jk}) = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Zavedeme *Levi-Civitův symbol* ε_{ijk}, [1] který je definován tak, že

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{je-li } (ijk) \text{ sudá permutace (123)} \\ -1 & \text{je-li } (ijk) \text{ lichá permutace (123)} \\ 0 & \text{shodují-li se alespoň dva z indexů } (ijk). \end{cases} \tag{2.40}$$

Snadno se přesvědčíme, že pro něj platí

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \ , \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2!\ \delta_{il} \ , \quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3!\ .$$

Pomocí Levi-Civitova symbolu lze elegantně vyjádřit *vektorový součin* dvou vektorů $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ jako

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k, \tag{2.41}$$

a také *smíšený součin*

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{2.42}$$

Všimněte si, že z vlastností determinantu plyne, že hodnota smíšeného součinu nezávisí na umístění znaků skalárního a vektorového součinu. Na základě vlastností Levi-Civitova symbolu se dále můžeme přesvědčit, že vektorový součin dvou polárních vektorů je axiální vektor a že smíšený součin tří polárních vektorů je pseudoskalár.

V geometrické interpretaci má vektorový součin dvou vektorů velikost rovnou obsahu rovnoběžníka tvořeného oběma vektory a míří kolmo k rovině obou vektorů ve směru pohybu pravotočivého šroubu otáčeného od vektoru $\boldsymbol{a}$ k vektoru $\boldsymbol{b}$ kratší cestou. Velikost smíšeného součinu tří polárních vektorů neležících v jedné rovině vyjadřuje objem rovnoběžnostěnu určeného touto trojicí vektorů podél hran. Přesvědčte se o tom.

Vztahy mezi γ_{ik} a Ω_i můžeme tedy zapsat jako

$$\gamma_{ik} = \varepsilon_{ikl}\Omega_l, \qquad \Omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\gamma_{jk}. \tag{2.43}$$

Při infinitesimální rotaci soustavy souřadnic se souřadnice radiusvektoru změní o

$$\delta x_i = x'_i - x_i = \varepsilon\gamma_{ik}x_k = \varepsilon\varepsilon_{ikl}x_k\Omega_l\ . \tag{2.44}$$

Protože pro vektorový součin vektorů $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ platí $(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})_i = \varepsilon_{ikl}x_k\Omega_l$, můžeme psát změnu souřadnic radiusvektoru ve tvaru

$$\delta x_i = \varepsilon(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega})_i = (\boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{\varphi})_i, \qquad \text{kde} \qquad \delta\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon\boldsymbol{\Omega}. \tag{2.45}$$

Tento vztah se někdy symbolicky zapisuje

$$\delta\boldsymbol{r} = \varepsilon\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{r}\times\delta\boldsymbol{\varphi}.$$

$\boldsymbol{\Omega}$ je axiální vektor ve směru okamžité osy rotace a smyslu pravotočivého šroubu a $|\varepsilon\boldsymbol{\Omega}|$ je rovno úhlu pootočení $\delta\varphi$. Přitom

$$|\delta\boldsymbol{r}| = |\varepsilon\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega}| = r\sin\vartheta\delta\varphi\ . \tag{2.46}$$

Infinitesimální rotaci kartézské soustavy tedy můžeme popsat axiálním vektorem $\delta\boldsymbol{\varphi}$ a vzhledem k (2.45) lze různé infinitesimální rotace vektorově sčítat.

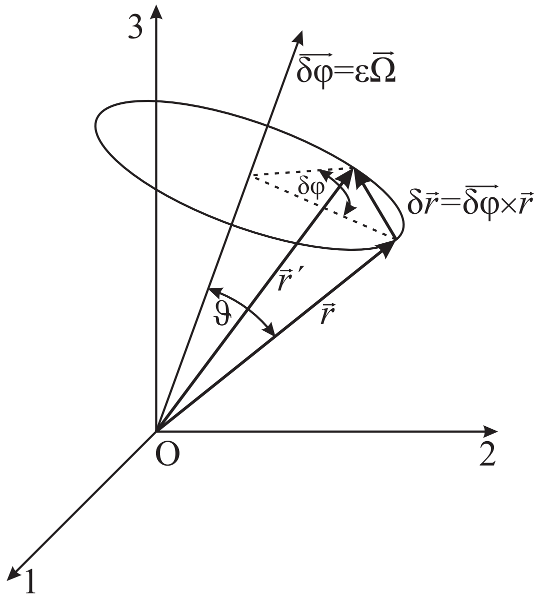
Podotkněme, že při pootočení vektoru $\boldsymbol{r}$ vůči *pevné* souřadné soustavě, které je znázorněno na obr. 2.1, platí vektorový vztah s opačným znaménkem

$$\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{r}. \tag{2.47}$$

V tomto případě jde o tzv. *aktivní interpretaci transformace* – na rozdíl od (2.45), kde jsme uvažovali pasivní pootočení soustavy souřadnic.

---

[1] Tullio Levi-Civitá, 1873–1941, italský matematik.



Obrázek 2.1: Infinitesimální rotace

Vrátíme se nyní k výsledku (2.35). Použijeme-li vztah (2.43), dostaneme

$$\gamma'_{ik}\alpha_{kj}b_j = \gamma'_{ik}b'_k = \varepsilon_{ikl}b'_k\Omega'_l = (\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{\Omega})'_i \tag{2.48}$$

Odvodili jsme tedy vztah (2.32). Zřejmě z něho plyne v případě $\boldsymbol{b}(t) = \Omega(t)$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{S} = \dot{\boldsymbol{\Omega}} \tag{2.49}$$

a v případě $\boldsymbol{b}(t) = \boldsymbol{r}(t)$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'} = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{S} + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\Omega}\ . \tag{2.50}$$

Poslední vztah je případem adičního teorému pro rychlosti

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + (\boldsymbol{v})^*\ , \tag{2.51}$$

kde $(\boldsymbol{v})^* = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ je *unášivá rychlost způsobená otáčením soustavy* S'. Konečně dvojí aplikací vektorové formy vztahu (2.32) na $\boldsymbol{r}(t)$ dostaneme transformaci zrychlení do rotující soustavy:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a}' &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S'}\boldsymbol{r} = \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S} - \boldsymbol{\Omega}\times\right]\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S} - \boldsymbol{\Omega}\times\right]\boldsymbol{r} = \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\Omega}\times\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S}\boldsymbol{r} - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)_{S}(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \\
&= \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \\
&= \boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}' - \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{r} - \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \\
&= \boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{E}} - \boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

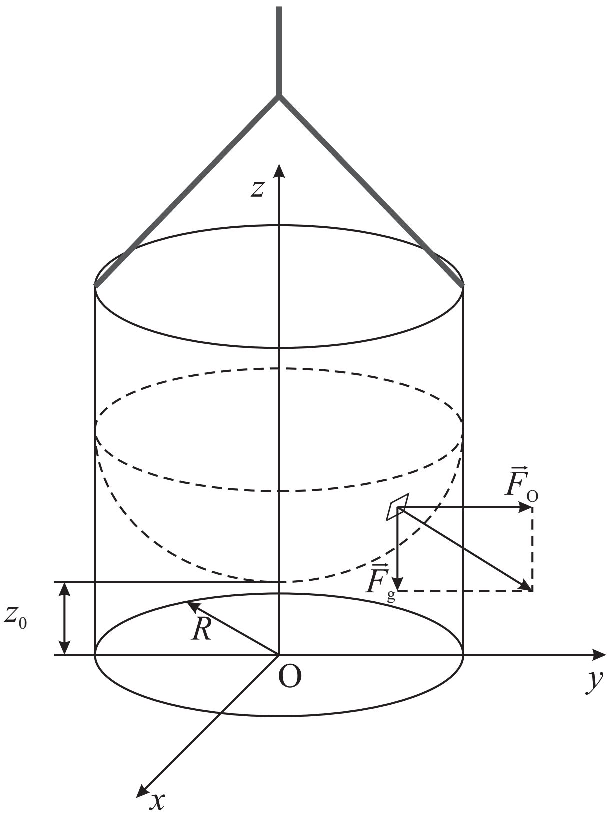
Předposledním krokem byla substituce (2.51), aby zrychlení v otáčející se soustavě bylo vyjádřeno pomocí rychlosti a radiusvektoru v soustavě S'.

Při transformaci zrychlení do rotující vztažné soustavy se tedy objevily tři nové členy, které jsme označili jako $\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$ (zrychlení Coriolisovo), $\boldsymbol{a}_{\mathrm{E}}$ (zrychlení Eulerovo) a $\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}$ (zrychlení dostředivé). To odpovídá situaci, kdy v rotující soustavě působí na částici hmotnosti m kromě pravých sil obecně též tři nepravé, setrvačné síly:

$$\begin{array}{ll}
\text{síla Coriolisova :} & \boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = 2m\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{\Omega} \\
\text{síla Eulerova :} & \boldsymbol{F}_{\mathrm{E}} = m\boldsymbol{r}'\times\dot{\boldsymbol{\Omega}} \\
\text{síla odstředivá :} & \boldsymbol{F}_{\mathrm{o}} = m\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{\Omega})
\end{array}$$

Ve vektorovém zápisu ovšem můžeme klást $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$.

V neinerciální vztažné soustavě tedy na částici obecně působí vedle vtištěné, pravé síly (např. gravitační nebo elektromagnetické) ještě čtyři další *síly setrvačné, nepravé: síla translační (2.30), síla Eulerova, síla odstředivá a síla Coriolisova* (Gaspard Gustave Coriolis, 1792–1843). První tři z těchto sil působí i na částici původně nehybnou a nazývají se někdy souhrnně *síla unášivá*. Naproti tomu síla Coriolisova působí pouze na částice, které se v neinerciální soustavě pohybují. [2]



Obrázek 2.2: Newtonovo vědro

Newtonovo vědro

Setrvačné síly musíme do neinerciální soustavy ‘zavést’, abychom dostali souhlas s experimentem. Newton ještě nepoužíval pojem inerciální soustavy, ale uvažoval pohyb vzhledem k nehybnému, ‘absolutnímu’ prostoru. V souvislosti s tím zkoumal názorný příklad rotace vědra naplněného vodou zavěšeného na zakrouceném vlákně *Newtonovo vědro*). Na tomto příkladě lze názorně ukázat, proč je v neinerciální soustavě třeba uvažovat odstředivou a Coriolisovu sílu.

Na obr. 2.2 je znázorněn experiment s Newtonovým vědrem. Protože voda je vazká nestlačitelná kapalina, působí na ni tečné síly od stěn rotujícího vědra a postupně tak uvádějí do pohybu koncentrické válcové vrstvy kapaliny. Nakonec bude kapalina v celém objemu rotovat spolu s vědrem. Přitom vytvoří hladinu s prohlubní tvaru rotačního paraboloidu charakteristickou pro tzv. newtonovské kapaliny.

Pokud bychom řešili úlohu o Newtonově vědru v inerciální soustavě, v níž vědro rotuje, museli bychom uvážit pravé síly působící na vybraný element kapaliny, tedy sílu tíhovou a sílu se strany sousedních elementů kapaliny. Použili bychom rovnici pro pohyb vazké kapaliny a našli bychom vztah mezi rychlostí vybraného elementu a tlakem v kapalině. Podmínka nulového tlaku na hladině by nám pak dala rovnici pro geometrický tvar hladiny.

Mohli bychom však také přejít do neinerciální soustavy rotující spolu s vědrem. V tom případě je situace jednodušší, neboť kapalina je v této soustavě v klidu a působí na ni jediná pravá síla, síla tíhová. Jak ale vysvětlit

[2] Setrvačnou sílu odstředivou nelze zaměňovat s odstředivou silou pravou, která je reakcí na sílu dostředivou v inerciální vztažné soustavě. V inerciální soustavě působí dostředivá a odstředivá síla na různá tělesa. Naproti tomu v neinerciální soustavě k odstředivé síle neexistuje reakce v podobě dostředivé síly, protože nelze ukázat těleso, které by odstředivou sílu vyvolávalo. Tento terminologický šum je bohužel posilován i tím, že matematické výrazy pro odstředivou sílu pravou a setrvačnou jsou si podobné.

tvar hladiny, který je experimentálním faktem a nemůže záviset na zvolené vztažné soustavě? Nezbývá než si ‘přimyslet’ novou sílu, která musí v rotující soustavě působit, sílu odstředivou.

Je-li p tlak a vnější síly G_i vztažené na jednotku hmotnosti lze vyjádřit pomocí potenciálu φ jako $G_i = -\partial\varphi/\partial x_i$, můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy pro nestlačitelnou kapalinu hustoty ρ napsat jako

$$\mathrm{d}p = -\rho \mathrm{d}\varphi \quad \text{neboli} \qquad p = -\rho\varphi + p_0 \ . \tag{2.53}$$

Výsledná síla G_i působící na element kapaliny je vektorovým součtem síly tíhové a síly odstředivé (viz obr. 2.2) a má potenciál

$$\varphi = gz - \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) \ , \tag{2.54}$$

jak se snadno přesvědčíme derivováním (se záporným znaménkem). Dosadíme-li tento potenciál do (2.53) a položíme-li na hladině $p = 0$, dostaneme rovnici rotačního paraboloidu

$$z = \frac{p_0}{\rho g} + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) \ . \tag{2.55}$$

Zbývá určit konstantu p_0. Najdeme-li integrací objem kapaliny v rotujícím vědru a porovnáme s objemem kapaliny v nehybném vědru, dostaneme

$$z = \left(h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}\right) + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) = z_0 + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) \ , \tag{2.56}$$

kde h_0 je výška hladiny v nehybném vědru a R poloměr vědra.

Uvažujme však hypotetický případ, kdy místo vody naplníme vědro ideální kapalinou bez vnitřního tření, např. supratekutým kapalným heliem. V takovém případě rotující vědro neuvede kapalinu do rotačního pohybu, kapalina zůstane v klidu a její hladina bude vodorovná. Jak nyní vysvětlíme tento fakt z hlediska neinerciální vztažné soustavy, v níž musí stále působit síla tíhová a síla odstředivá? Jediný rozdíl bude nyní ten, že kapalina v neinerciální soustavě rotuje, a to stejnou úhlovou rychlostí a opačným směrem než vědro. Nezbývá tedy než ‘zavést’ další sílu, která jednak vykompenzuje odstředivou sílu $r\omega^2$ (hladina nemá prohlubeň!), ale musí zároveň vysvětlit rotaci kapaliny, tj. vytvořit dostředivou sílu, která uvádí vybraný element do rotačního pohybu. Taková síla musí tedy mít velikost $2r\omega^2$ a mířit opačným směrem než síla odstředivá. Takovou vlastnost má síla Coriolisova.

Einsteinova zdviž

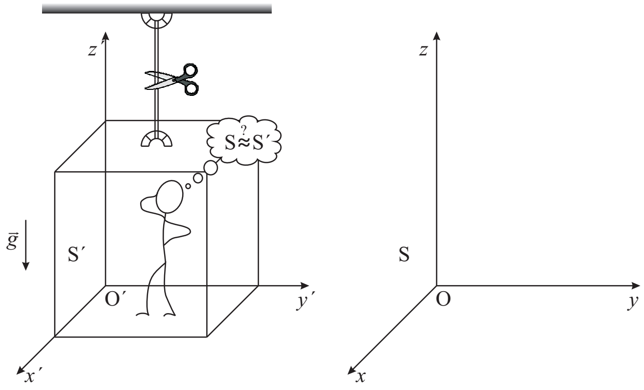
Výskyt setrvačných sil těsně souvisí s existencí beztížného stavu. Lze to ilustrovat myšleným pokusem s tzv. *Einsteinovou zdviží* (některé pokusy je lépe provádět jen jako myšlené).

Uvažujme inerciální vztažnou soustavu S spojenou s nehybnými stěnami šachty zdviže a soustavu S' spojenou se stěnami a podlahou zdviže. Pokud zdviž stojí nebo se pohybuje rovnoměrně přímočaře vzhledem k soustavě S, je tato vztažná soustava rovněž inerciální. Jestliže se lano zdviže přetrhne a zdviž se začne pohybovat volným pádem, stane se zdviží Einsteinovou a soustava s ní spojená bude neinerciální (obr. 2.3). Orientujme kartézskou osu z' svislým směrem vzhůru. Na částici hmotnosti m v této vztažné soustavě bude pak působit jednak pravá síla tíhová $-mg$ směrem dolů [3], jednak translační setrvačná síla mg směrem vzhůru (soustava se totiž pohybuje vzhledem k inerciální soustavě se zrychlením $-g$. Přitom podle principu ekvivalence považujeme gravitační a setrvačnou hmotnost za sobě rovné. Výsledná pohybová rovnice pro částici bude

$$m\ddot{z}' = -mg + mg = 0 \ . \tag{2.57}$$

Částice se tak nachází ve stavu ‘beztíže’. Neznamená to však, že by na částici nepůsobily žádné síly (pak bychom hovořili o *bezsilové částici*), ale pouze to, že tíhová síla je vykompenzována silou setrvačnou. Podobný efekt lze pozorovat i v družici kroužící (= volně padající) kolem Země: kosmonauti i předměty se vznášejí v kabině.

[3] Síla tíhová není přesně vzato silou pravou, ale vektorovým součtem pravé síly gravitační a setrvačné síly odstředivé vyvolané rotací Země. Tuto okolnost zde neuvažujeme, bude ale významná v úloze o Foucaultově kyvadle.



Obrázek 2.3: Einsteinova zdviž

2.3 Soustava volných částic

Mějme soustavu N volných částic[4] označených indexy $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, které mezi sebou vzájemně působí *vnitřními silami* $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ a jsou také vystaveny působení *vnějších (externích) sil* $\boldsymbol{F}^{(e)}_{\alpha}$. Soustavu částic pozorujeme v jisté inerciální vztažné soustavě, takže všechny uvažované síly jsou pravé. Označíme hmotnosti, polohové vektory, rychlosti a hybnosti částic m_α, $\boldsymbol{r}_\alpha$, $\boldsymbol{v}_\alpha$,$\boldsymbol{p}_\alpha$. Podle druhého Newtonova zákona

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta\neq\alpha} \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{F}^{(e)}_{\alpha} \ , \tag{2.58}$$

kde suma na pravé straně udává výslednici vnitřních sil, jimiž na částici α působí všechny ostatní částice. Předpokládáme, že částice sama na sebe nepůsobí.

Sečteme-li všechny rovnice (2.58), zavedeme *celkovou hybnost soustavy*

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{p}_\alpha \ , \tag{2.59}$$

zaměníme pořadí sčítání a derivování, použijeme třetí Newtonův zákon $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{F}_{\beta\alpha}$ a označíme výslednici vnějších sil $\sum_{\alpha} \boldsymbol{F}^{(e)}_{\alpha} = \boldsymbol{F}^{(e)}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}^{(e)} \ . \tag{2.60}$$

Tento vztah je svým způsobem zobecněním Newtonova zákona síly na soustavu částic a z historických důvodů mu říkáme **první věta impulsová**.

V izolované soustavě je výslednice vnějších sil nulová a z první věty impulsové plyne **zákon zachování celkové hybnosti soustavy**:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{P} = \mathbf{konst} \ . \tag{2.61}$$

Přejdeme-li od inerciální soustavy S k soustavě S', která se pohybuje vzhledem k soustavě S konstantní rychlostí $\boldsymbol{V}$, platí

$$\boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \ ,$$

a tedy

$$\boldsymbol{P} = \sum_{\alpha} \boldsymbol{p}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha = \sum_{\alpha} m_\alpha \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \sum_{\alpha} m_\alpha = \boldsymbol{P}' + M\boldsymbol{V} \ . \tag{2.62}$$

[4]Částice podrobené vazbám budou předmětem odstavce 3.1.

Zde $\boldsymbol{P}'$ je hybnost soustavy částic v pohybující se inerciální soustavě S' a $M = \sum_\alpha m_\alpha$ je *celková hmotnost soustavy*. Hybnost izolované soustavy částic je tedy konstantní, ale obecně různá v různých inerciálních vztažných soustavách.

Zvolíme-li rychlost pohybující se vztažné soustavy

$$\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{P}}{M} = \frac{\sum\limits_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha}{\sum\limits_\alpha m_\alpha} \quad , \tag{2.63}$$

bude v této soustavě hybnost $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{0}$. I když jsou všechny inerciální vztažné soustavy z hlediska zákonů mechaniky rovnocenné, bude tato soustava přece jen význačná mezi ostatními a některé vztahy platné v této soustavě budou mít jednodušší tvar. Tato vztažná soustava se nazývá *těžišťová*.

Budeme-li si v prostoru myslet hmotný bod o polohovém vektoru

$$\boldsymbol{R} = \frac{\sum\limits_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha}{\sum\limits_\alpha m_\alpha} \quad , \tag{2.64}$$

bude se tento bod v inerciální vztažné soustavě S pohybovat konstantní rychlostí $\boldsymbol{V}$ a v soustavě S' bude setrvávat v klidu. Je v něm jako by soustředěna celá hmotnost soustavy částic a je nositelem celé její hybnosti. Nazýváme ho *hmotný střed* nebo stručněji *těžiště*. V izolované soustavě hmotných bodů platí tedy zobecněný zákon setrvačnosti:

> *Těžiště izolované soustavy volných hmotných bodů setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.*

Můžeme ho považovat za **zákon zachování rychlosti těžiště soustavy**.

Vedle hybnosti částice definujeme též její *moment hybnosti*[5] vztahem

$$\boldsymbol{l}_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{p}_\alpha . \tag{2.65}$$

Na rozdíl od hybnosti je tedy moment hybnosti vztažen k určitému počátku souřadnic. Vynásobíme-li pohybové rovnice (2.58) pro jednotlivé částice zleva vektorově polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_\alpha$, dostaneme

$$\boldsymbol{r}_\alpha \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_{\beta\neq\alpha} (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}) + \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{e})} \ . \tag{2.66}$$

Sečteme nyní tyto rovnice přes všechny částice, zavedeme *celkový moment hybnosti soustavy*

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha \boldsymbol{l}_\alpha = \sum_\alpha (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{p}_\alpha) \tag{2.67}$$

a uvážíme, že vektory $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha/\mathrm{d}t$ a $\boldsymbol{p}_\alpha$ jsou rovnoběžné. Pak můžeme levou stranu výsledné rovnice upravit na

$$\sum_\alpha \left(\boldsymbol{r}_\alpha \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} \right) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \ . \tag{2.68}$$

Označíme- li výsledný moment vnějších sil $\boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})} = \sum_\alpha (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{e})})$ a použijeme třetí Newtonův zákon, dostaneme pravou stranu rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}) + \sum_\alpha (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_\alpha^{(\mathrm{e})}) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} (\boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} + \boldsymbol{r}_\beta \times \boldsymbol{F}_{\beta\alpha}) + \boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta\neq\alpha} [(\boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}_\beta) \times \boldsymbol{F}_{\alpha\beta}] + \boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})} \ . \end{aligned} \tag{2.69}$$

[5]Ve fyzikální literatuře, a zejména v kvantové mechanice, se místo termínů hybnost a moment hybnosti setkáváme s názvy impuls a impulsmoment.

Jsou-li dále síly *centrální*, tj. platí $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha) f_{\alpha\beta}, \quad f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{N}^{(\mathrm{e})} \ . \tag{2.70}$$

Tento vztah je svým způsobem zobecněním Newtonova zákona síly na rotační pohyby v soustavě částic a z historických důvodů mu říkáme **druhá věta impulsová**. V izolované soustavě je výsledný moment vnějších sil nulový a z druhé věty impulsové plyne **zákon zachování celkového momentu hybnosti soustavy**:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{L} = \mathbf{konst} \ . \tag{2.71}$$

Přejdeme-li od inerciální soustavy S k inerciální soustavě S', která se pohybuje vzhledem k soustavě S konstantní rychlostí $\boldsymbol{V}$, platí

$$\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{r}(O'), \quad \boldsymbol{r}(O') = \boldsymbol{r}^0 + \boldsymbol{V}t, \quad \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V} \quad ,$$

kde $\boldsymbol{r}^0$ je konstantní vektor (polohový vektor počátku O' v soustavě S v okamžiku $t = 0$). Po dosazení do (2.67) a jednoduchých úpravách dostaneme

$$\boldsymbol{L} = \sum_\alpha \boldsymbol{l}_\alpha = \sum_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \times \boldsymbol{v}_\alpha = \boldsymbol{L}' + \boldsymbol{r}^0 \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{r}^0 \times M\boldsymbol{V} + t\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{P} - \boldsymbol{V} \times \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}_\alpha \ . \tag{2.72}$$

Zderivováním (2.72) podle času zjistíme, že v izolované soustavě částic

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}'}{\mathrm{d}t} = 0 \ . \tag{2.73}$$

Celkový moment hybnosti izolované soustavy částic je tedy konstantní, ale obecně různý v různých inerciálních vztažných soustavách. Jsou-li soustavy S a S' vzájemně nehybné ($\boldsymbol{V} = \boldsymbol{0}$) a je-li soustava těžišťová ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$), bude $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}'$ a moment hybnosti soustavy nezávisí na volbě počátku.

Vynásobíme nyní pohybové rovnice (2.58) skalárně vektory $\boldsymbol{v}_\alpha$, sečteme je a zavedeme *kinetickou energii soustavy*

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2 \ . \tag{2.74}$$

Pak můžeme levou stranu výsledné rovnice upravit na

$$\sum_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{v}_\alpha \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\alpha}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_\alpha^2\right) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \ . \tag{2.75}$$

Na pravé straně bude vystupovat výkon vnitřních a vnějších sil. Označme výkon vnějších sil jako Q^{e} a o vnitřních silách předpokládejme, že jsou *konzervativní*, tj. že existuje[6] skalární funkce $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, ..., \boldsymbol{r}_N)$ taková, že výslednice vnitřních sil působících na částici s indexem α se dá vyjádřit jako

$$\boldsymbol{F}_\alpha = \sum_\beta \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\right) = -\boldsymbol{\nabla}_\alpha U \ . \tag{2.76}$$

Funkci U nazveme *potenciální energií soustavy*. Pravá strana rovnice pak bude mít tvar

$$\sum_{\alpha\beta} \boldsymbol{F}_{\alpha\beta} \cdot \boldsymbol{v}_\alpha + \sum_\alpha \boldsymbol{F}^{\mathrm{e}}_\alpha \cdot \boldsymbol{v}_\alpha = -\sum_\alpha \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_\alpha} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_\alpha}{\mathrm{d}t} + Q^{\mathrm{e}} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + Q^{\mathrm{e}} \ . \tag{2.77}$$

Součet kinetické a potenciální energie soustavy částic označíme $E = T + U$ a nazveme *mechanická energie soustavy*. Porovnáním (2.75) a (2.77) dostaneme **větu o mechanické energii soustavy**:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = Q^{(\mathrm{e})} \ . \tag{2.78}$$

[6] Pro vektorové pole $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ definované v jisté oblasti prostoru R^3 taková funkce $U(\boldsymbol{r})$ nemusí existovat. Podmínkou pro její existenci je, aby rot $\boldsymbol{F} = 0$ v jednoduše souvislé oblasti $V \subset R^3$. Pak je funkce U dána křivkovým integrálem $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ jako funkce horní meze $\boldsymbol{r}$. Jak ukazuje řešení úlohy 2.1, pro centrální izotropní síly funkce U vždy existuje.

Změna mechanické energie soustavy je rovna výkonu vnějších sil.

Pro izolovanou soustavu je výslednice vnějších sil nulová a tedy i jejich výkon je nulový a platí **zákon zachování mechanické energie soustavy**

$$E = T + U = \text{konst.} \tag{2.79}$$

Matematická vsuvka 3.
Operátor nabla

Vektorový operátor $\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ se nazývá poněkud neobvyklým termínem *nabla* (podle tvaru připomínajícího starověký hudební nástroj). Jeho druhá mocnina označovaná symbolem

$$\Delta = \boldsymbol{\nabla}^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \tag{2.80}$$

se nazývá *Laplaceův operátor* nebo zkráceně 'laplacián'.

Připomeňme nejdůležitější diferenciální vztahy vektorové analýzy. Uvažujme skalární (stacionární) pole $\varphi(x_1, x_2, , x_3)$ a vektorové pole $\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3)$. Jsou-li $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ jednotkové vektory ve směru kartézských souřadných os tvořící tzv. ortonormální bázi kartézské soustavy, může být obecný vektor $\boldsymbol{a}$ zapsán ve složkovém tvaru jako $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3$. Přitom zřejmě $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$.

Potom *gradient* skalárního pole φ definovaný vztahem

$$\text{grad}\ \varphi = \boldsymbol{\nabla}\ \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right) = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \tag{2.81}$$

udává směr a velikost největšího stoupání φ.

Vydatnost zřídla v daném bodě vztaženou na jednotku objemu udává *divergence* vektorového pole

$$\text{div}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}. \tag{2.82}$$

Rotace vektorového pole udává plošnou hustotu cirkulace. Je to vektor orientovaný kolmo k rovině maximálního víru $\boldsymbol{F}$ v daném bodě a smyslem odpovídající pohybu pravotočivého šroubu. Lze ho vyjádřit pomocí operátoru nabla jako vektorový součin

$$\text{rot}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}. \tag{2.83}$$

Dále se uplatní též operátor

$$(\boldsymbol{F} \cdot \text{grad}) = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla}) = F_1\frac{\partial}{\partial x_1} + F_2\frac{\partial}{\partial x_2} + F_3\frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{2.84}$$

Podotkněme, že operátory $(\boldsymbol{F} \cdot \text{grad})$ a Laplaceův operátor Δ mohou působit jak na skalární pole, tak i na vektorové pole (po složkách).

Použitím definic operátorů v kartézských souřadnicích snadno ověříme celou řadu dalších vztahů. Tak například

$$\text{rot grad}\ \varphi = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi = 0, \quad \text{div rot}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F} = 0, \quad \text{div grad}\ \varphi = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = \Delta\ \varphi.$$

Vztah pro dvojnásobnou rotaci

$$\text{rot rot}\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}) = \text{grad div}\ \boldsymbol{F} - \Delta\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \boldsymbol{F}$$

je obdobou známého vztahu pro dvojitý vektorový součin $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$. Dále platí

$$\begin{aligned}
\text{div } (\varphi \boldsymbol{F}) &= \varphi \text{ div } \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F} \cdot \text{grad } \varphi, \\
\text{rot } (\varphi \boldsymbol{F}) &= \varphi \text{ rot } \boldsymbol{F} + \text{grad } \varphi \times \boldsymbol{F}, \\
\text{div } (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{G} \cdot \text{rot } \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \text{rot } \boldsymbol{G}, \\
\text{rot } (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F}\text{div } \boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}\text{div } \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \boldsymbol{F} - (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \boldsymbol{G}, \\
\text{grad } (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G}) &= \boldsymbol{F} \times \text{rot } \boldsymbol{G} + \boldsymbol{G} \times \text{rot } \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\nabla})\ \boldsymbol{G}.
\end{aligned}$$

Z integrálních vět vektorové analýzy se nejčastěji uplatní *věta Gaussova* a *věta Stokesova*. Mějme objem V uzavřený plochou ∂V. Gaussova věta dává do souvislosti *tok* Φ *vektorového pole* $\boldsymbol{F}$ plochou ∂V (kladný, vychází-li tento tok zevnitř ven) a celkovou vydatnost zdrojů v objemu V:

$$\Phi = \oint_{\partial V} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_V \text{div } \boldsymbol{F} \mathrm{d}V. \tag{2.85}$$

Mějme plochu f, jejíž okraj tvoří křivka γ. Stokesova věta dává do souvislosti *cirkulaci* Γ *vektorového pole* $\boldsymbol{F}$ podél křivky γ s intenzitou víru na ploše f:

$$\Gamma = \oint_{\gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_f \text{rot } \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{f}. \tag{2.86}$$

Je třeba si uvědomit, že jsme vnitřní síly působící v soustavě považovali za konzervativní; při nich se konzervuje, zachovává mechanická energie. Konají-li tyto síly práci nad částicemi soustavy, klesá potenciální energie soustavy a kinetická energie roste. Pokud by v soustavě působily například disipativní síly tření, které konzervativní nejsou, mechanická energie by se nazachovávala a částečně by přecházela v teplo. V tom případě soustava není přesně vzato izolovaná a dostáváme se za rámec mechaniky. Pojem energie se ovšem neomezuje jen na mechaniku, obecným zákonem zachování energie a jejími přeměnami se zabývá termodynamika.

Přejdeme nyní od inerciální soustavy S k soustavě S', která se pohybuje vzhledem k soustavě S konstantní rychlostí $\boldsymbol{V}$. Jestliže potenciální energie U závisí pouze na vzdálenostech mezi částicemi, bude platit $U = U'$ a mechanická energie se bude transformovat na

$$E = T + U = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{v}'_\alpha + \boldsymbol{V})^2 + U' = \frac{1}{2} M V^2 + \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{P}' + \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha v'^2_\alpha + U' \quad . \tag{2.87}$$

Poslední dva členy na pravé straně vyjadřují vnitřní pohyby a síly v soustavě a $T' = \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v'^2_\alpha$ je vnitřní kinetická energie. Vnitřní energie soustavy je pak $E' = T' + U'$. Je-li S' soustava těžišťová, máme

$$E = E' + \frac{1}{2} M V^2 \quad . \tag{2.88}$$

Energii soustavy lze tedy rozdělit na energii vnitřní (energii v těžišťové soustavě) a na kinetickou energii těžiště. Pro kinetickou energii pak máme

$$T = T' + \frac{1}{2} M V^2 \quad . \tag{2.89}$$

Platí tedy:

> *Kinetická energie soustavy se rovná součtu vnitřní kinetické energie jejích částic a kinetické energie těžiště.*

Toto tvrzení je obsahem tzv. **Königovy věty** (Johann Samuel König, 1712–1757).

Pro izolovanou soustavu volných částic jsme na základě Newtonových zákonů odvodili *deset zákonů zachování* pro tři vektorové veličiny ($\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{L}$) a jeden skalár (E). Dále uvidíme, že tyto zákony platí i pro obecnější třídu sil, než se kterými pracuje Newtonova mechanika. V tom je jejich mimořádný význam.

Rovnice Meščerského

První větu impulsovou můžeme použít také při řešení úlohy, kdy se od pohybujícího se tělesa oddělují nebo naopak k němu připojují části. Je to případ celkem častý; můžeme si představit vozidlo, které při pohybu trousí náklad (kropicí vůz) nebo konec konců jakýkoliv automobil, jemuž během jízdy ubývá benzin v nádrži. Jinými příklady mohou být: jádro komety, která se odpařuje, těleso letící ve vánici, na něž se nabaluje sníh či námraza, padající dešťová kapka, která se odpařuje nebo na níž kondenzuje další voda (příklad 2.8). Vlastně se zde nejedná o problém pohybu jednoho tělesa s proměnnou hmotností, ale o *pohyb soustavy těles*, takže k jeho řešení musíme místo Newtonovy pohybové rovnice použít právě první větu impulsovou. Pozornost k této úloze se již dávno zaměřovala v souvislosti s popisem pohybu rakety, která se pohybuje reaktivní silou vyvolanou tryskajícími plyny.

Nechť se těleso pohybuje ve vnějším silovém poli $\boldsymbol{F}(t)$ a jeho hmotnost a rychlost se v čase mění jako $m(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$. Od tělesa se přitom oddělují (nebo se k němu připojují) části *relativní rychlostí* $\boldsymbol{u}$. Určíme rychlost změny celkové hybnosti soustavy jako

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)\boldsymbol{v}(t)) - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(t)(\boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}).$$

Tento vztah lze získat výpočtem změny celkové hybnosti soustavy během infinitesimálního časového intervalu $(t, t+\mathrm{d}t)$. Tato změna je rovna rozdílu celkové hybnosti soustavy v okamžiku $t+\mathrm{d}t$ a celkové hybnosti soustavy v okamžiku t. Odečítaná část ovšem zahrnuje nejen hybnost tělesa v čase t, ale i hybnost další části soustavy $\mathrm{d}m$, jež se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$. Po snadné úpravě pak první věta impulsová dává **rovnici Meščerského** (Ivan Vsevolodovič Meščerskij, 1851–1935)

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{u}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}. \tag{2.90}$$

Je patrné, že se tato rovnice liší od Newtonovy pohybové rovnice tělesa s proměnnou hmotností

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m(t)\boldsymbol{v}(t)) = \boldsymbol{F}.$$

V rovnici Meščerského (2.90) jsou dvě neznámé funkce, $m(t)$ a $\boldsymbol{v}(t)$. Musíme proto použít nějaký model pro připojování resp. odpojování částí a znát ještě podmínky kladené na relativní rychlost $\boldsymbol{u}$. Jestliže se od tělesa oddělují části nulovou relativní rychlostí (např. vozidlo trousí náklad), můžeme položit $\boldsymbol{u} = 0$. Pohybuje-li se těleso nehybným prostředím a nabalují se na něho částice, např. sněhu nebo vody, můžeme položit $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$ (viz příklad 2.8).

Nejznámější je *úloha Ciolkovského*, kdy se raketa pohybuje mimo dosah tíhového pole ($\boldsymbol{F} = 0$), relativní rychlost $\boldsymbol{u}$ je konstantní, míří opačným směrem než rychlost rakety, hmotnost rakety klesá a raketa se urychluje. V tom případě má rovnice Meščerského jednoduchou jednorozměrnou formu ($v = |\boldsymbol{v}|$, $u = |\boldsymbol{u}|$, $\mathrm{d}m < 0$)

$$m\mathrm{d}v + u\mathrm{d}m = 0,$$

kterou lze snadno zintegrovat na *Ciolkovského raketovou rovnici*

$$\Delta v = v_1 - v_0 = u \ln \frac{m_0}{m_1}, \tag{2.91}$$

jež vyjadřuje závislost přírůstku rychlosti na úbytku hmotnosti rakety. Abychom našli závislost rychlosti na čase, tj. vyřešili pohybovou rovnici, museli bychom ještě vědět, jak se s časem mění hmotnost rakety.

2.4 Úlohy

2.1 *Konzervativní síly* Je dána soustava částic interagujících po dvojicích $\alpha \neq \beta$ centrálními izotropními silami $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta} = (\boldsymbol{r}_\beta - \boldsymbol{r}_\alpha) f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta})$, kde $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$ a integrály $\int_a^r f_{\alpha\beta}(r) r dr$ existují jako funkce horní meze ($a > 0$). Ukažte, že tyto síly jsou konzervativní.

[Na základě vztahu $\boldsymbol{F} = -\nabla U(r)$ definujte potenciály $U_{\alpha\beta}$ jako řešení diferenciálních rovnic $U'_{\alpha\beta} = r f_{\alpha\beta}(r)$.]

2.2 *Poloha těžiště* Dokažte, že poloha těžiště definovaného vztahem (2.64) nezávisí na volbě počátku.

[Při transformaci $\boldsymbol{r}'_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}(O', t)$ platí $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}(O', t)$.]

2.3 *Inerciální těžišťová soustava* Přesvědčte se, že soustavu souřadnou pevně spojenou s těžištěm izolované soustavy částic je možno vždy volit tak, aby byla inerciální.

[Uvažte izolovanou soustavu v kartézských souřadnicích.]

2.4 *Celkový moment hybnosti při změně počátku* Vypočítejte celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}^Q$ soustavy hmotných bodů v systému S, ale vzhledem k bodu $Q \neq O$, který má v S pevnou polohu. Udejte, pro které body Q je $\boldsymbol{L}^Q = \boldsymbol{L}$. Ukažte, že $\boldsymbol{L}^Q = \boldsymbol{L}'$, kde $\boldsymbol{L}'$ je moment hybnosti v soustavě S' vzhledem k počátku $O' = Q$, jestliže se S' neotáčí vůči S.

[$\boldsymbol{L}^Q = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}(Q) \times \boldsymbol{P}$.]

2.5 *Moment hybnosti při změně vztažné soustavy*

a) Vypočítejte moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ vzhledem k počátku O' v soustavě S' definované transformacemi $\boldsymbol{r}'_\alpha = \boldsymbol{r}_\alpha - \boldsymbol{r}(O')$; systém S je inerciální, S' obecně neinerciální.

b) Specializací výsledného vztahu mezi $\boldsymbol{L}'$ a $\boldsymbol{L}$ pro případ Galileiho transformace, kdy $\boldsymbol{r}(O') = \boldsymbol{r}^0 + \boldsymbol{V}t$, získejte vztah (2.72).

c) Specializujte $\boldsymbol{L}'$ z bodu a) pro soustavu S', jejíž počátek je v těžišti, $\boldsymbol{r}(O') = \boldsymbol{R}$. Kdy platí $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L}$?

[a) $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}(O') \times \boldsymbol{P} + \boldsymbol{r}(O') \times M\dot{\boldsymbol{r}}(O') + \dot{\boldsymbol{r}}(O') \times M\boldsymbol{R}$;

c) $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{L} \Longleftrightarrow \dot{\boldsymbol{R}} = \eta \boldsymbol{R}, \eta = \text{konst.}$]

2.6 *Druhá věta impulsová v těžišťové soustavě* Převeďte rovnici (2.70) , která vyjadřuje druhou větu impulsovou v inerciální soustavě S, do (obecně neinerciální) soustavy S' spojené s těžištěm.

[Použijte transformační vztah $\boldsymbol{r}_\alpha = \boldsymbol{r}'_\alpha + \boldsymbol{R}$ a výsledek úlohy 2.5c. Dostanete $\dot{\boldsymbol{L}}' = \sum \boldsymbol{r}'_\alpha \times \boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}_\alpha$.]

2.7 *Pohyb v rotující vztažné soustavě* Pohybová rovnice bezsilového hmotného bodu v kartézském systému S', který se vzhledem k inerciálnímu systému S otáčí kolem osy z' konstantní úhlovou rychlostí ω_0 ($\boldsymbol{r}(O') = \boldsymbol{0}$), bude podle (2.52)

$$\ddot{x}' - 2\omega_0 \dot{y}' - \omega_0^2 x' = 0, \quad \ddot{y}' + 2\omega_0 \dot{x}' - \omega_0^2 y' = 0, \quad \ddot{z}' = 0.$$

Najděte obecné řešení soustavy těchto diferenciálních rovnic a parametrické rovnice trajektorie, je-li bod vypuštěn v čase $t = 0$ s nulovou počáteční rychlostí z bodu $x' = a$, $y' = z' = 0$.

[Řešení hledejte ve tvaru $x' = X\mathrm{e}^{\lambda t}$, $y' = Y\mathrm{e}^{\lambda t}$: $x' = a\cos\omega_0 t$, $y' = -a\sin\omega_0 t$, $z' = 0$]

2.8 *Padající kapka* Vodní kapka hmotnosti m padá volným pádem v mlze rychlostí $\boldsymbol{v}$ a na jejím povrchu kondenzuje další voda tak, že přírůstek hmotnosti kapky je úměrný jejímu povrchu S: $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \alpha S$. Určete, jak se bude měnit rychlost narůstající kapky s časem, neuvažujeme-li odpor vzduchu.

[Použijeme rovnici Meščerského, kde vzájemnou rychlost kapky a prostředí položíme $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v}$. Je-li kapka sférická, bude pro změnu hmotnosti platit $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 3km^{2/3}$, kde $k = \alpha(4\pi/3\rho^2)^{1/3}$, ($\rho$ je hustota vody). Hmotnost kapky poroste jako $m(t) = (kt + m_0^{1/3})^3$, kde m_0 je počáteční hmotnost kapky. Rychlost se mění podle zákona

$$v = \frac{g}{m(t)} \int_0^t m(t)\mathrm{d}t + v_0.$$

Jsou-li počáteční hmotnost a rychlost kapky nulové, mění se rychlost jako $v = (gt/4k^2)$. Je-li $\alpha < 0$, tedy $k < 0$, jde o odpaření kapky za čas $\tau = -m_0^{1/3}/k$.]

2.9 *Buquoyova úloha* Na pevné vodorovné podložce leží stočeno dokonale pružné vlákno (řetěz) o lineární hustotě τ. Konstantní síla F táhne vlákno svisle vzhůru do výšky h. Napište pohybovou rovnici vlákna a určete její první integrál. Síla zřejmě musí překonávat stále větší tíhu a ve výšce h_s se velikost tažné a tíhové síly vyrovnají a nastane stacionární stav. Úlohami tohoto druhu se zabýval v první polovině 19. století amatérský učenec Georg Buquoy z Čech, potomek pobělohorské šlechty.[7]

[$\ddot{h} = \frac{F}{\tau h} - g - \frac{\dot{h}^2}{h}$. Vynásobíme-li tuto rovnici (nenulovým) součinem $h\dot{h}$, můžeme ji zintegrovat na $\frac{1}{2}(h\dot{h})^2 = \frac{1}{2}\frac{Fh^2}{\tau} - \frac{1}{3}gh^3 + C$. Integrační konstantu musíme určit z počátečních podmínek. Pouze při velmi speciálním vztahu mezi h_0 a $\dot{h}_0$ bude $C = 0$ a rovnice má pak analytické řešení, kdy se vlákno pohybuje s konstantním zpomalením $-g/3$.]

[7] O podrobnostech viz Šíma V., Podolský J., Buquoy's problem, Eur. J. Phys. **26** (2005), 1037-1045 (Šíma V., Podolský J., Buquoyova úloha, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **51**:3 (2006), 177).