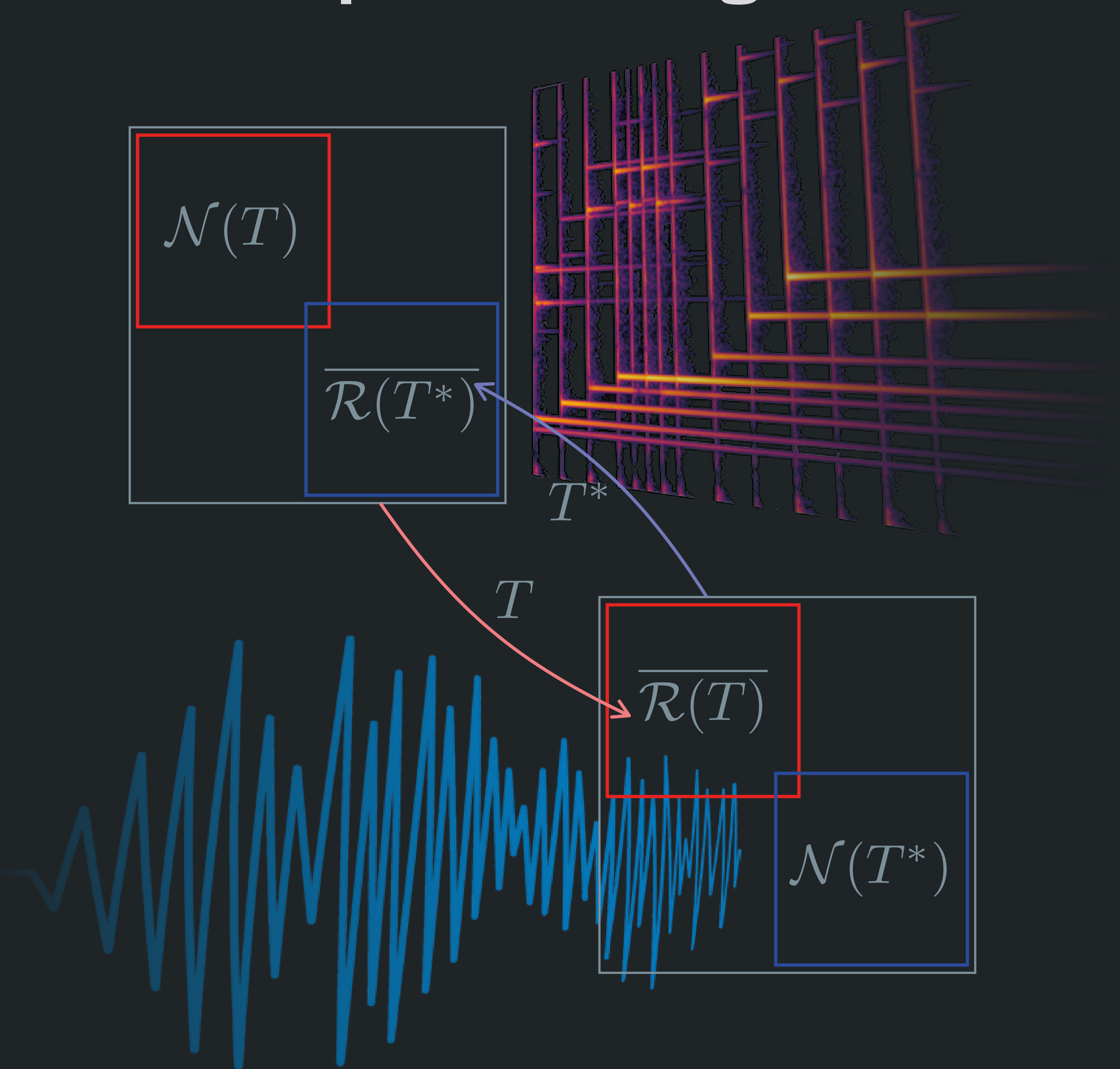
Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů



Vítězslav Veselý – Pavel Rajmic – Ondřej Mokrý

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
NAKLADATELSTVÍ VUTIUM

Vítězslav Veselý, Pavel Rajmic, Ondřej Mokrý

Moderní funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů

Odborná recenze: doc. RNDr. Jan Vybíral, Ph.D.

© Vítězslav Veselý, Pavel Rajmic, Ondřej Mokrý 2024
© Vysoké učení technické v Brně – Nakladatelství VUTIUM

ISBN 978-80-214-6138-3

Poděkování

Autoři děkují studentům z Vysokého učení technického v Brně, kteří v období mezi roky 2012 a 2019 nějakou formou napomohli napsání této knihy. Někteří v rané fázi vzniku textu přepsali určité pasáže do LaTeXu, někteří upozornili na překlepy a chyby, jiní nakreslili první podobu obrázků. Konkrétně autoři děkují (v abecedním pořadí) Marii Daňkové (Mangové), Alici Doktorové, Mateji Dolníkovi, Janu Dražkovi, Ivanu Eryganovi, Janu Horníčkovi, Ondřeji Klimešovi, Tereze Konečné, Jiřímu Kráčmarovi, Barboře Navrátilové, Eriku Ochodnickému, Josefu Svatoňovi, Martinu Tejkalovi, Haně Zemanové, Michaele Zemčíkové. Zvláštní poděkování patří Pavlu Záviškovi za pomoc s převedením obrázků do TikZ, za grafické a typografické úpravy a za řešení náročnějších problémů s LaTeXem.

Dále poděkování patří paní ředitelce Nakladatelství VUTIUM Janě Kořínkové za trpělivost a konstruktivní přístup při formování knihy, Janu Skůpovi z Ústřední knihovny VUT za zařízení DOI a trvalých odkazů na některé prameny, Zdeňkovi Průšovi a Radkovi Hrbáčkovi za programování některých ukázek v Matlabu někdy kolem roku 2010, a v neposlední řadě Janu Vybíralovi za jeho postřehy v odborné recenzi.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam zkratek a symbolů

<u>Všeobecné konvence značení</u>

V celém textu jsou používány následující běžné konvence značení.

Symbol/zkratka	Popis
	Číselné obory
$\mathbb{N}$	přirozená čísla: $1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$	nezáporná celá čísla: $0, 1, 2, 3, \ldots$
$\mathbb{Z}$	celá čísla: typicky i, j, k, m, n
$\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N-1\}$	zbytky po dělení celého čísla číslem $N \in \mathbb{N}$
$n \bmod N$	operace modulo: zbytek po dělení čísla $n \in \mathbb{Z}$ číslem $N \in \mathbb{N}$
$\mathbb{R}$	reálná čísla: typicky r, s, t
$\operatorname{sgn} r := \begin{cases} 1 & \text{pro } r > 0 \\ 0 & \text{pro } r = 0 \\ -1 & \text{pro } r < 0 \end{cases}$	znaménko čísla $r \in \mathbb{R}$
$\lfloor r \rfloor$	dolní celá část čísla $r \in \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$	nezáporná reálná čísla
$\mathbb{R}^- := \{r \in \mathbb{R} \mid r < 0\}$	záporná reálná čísla
$\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$	rozšířená množina reálných čísel
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla, typicky c, z $\bar{z}$ značí číslo komplexně sdružené k číslu $z \in \mathbb{C}$
$\Re c$ ($\Im c$)	reálná (imaginární) část čísla $c \in \mathbb{C}$
$\mathbb{F}$	zástupný symbol pro číselný obor $\mathbb{C}$ nebo $\mathbb{R}$ (viz 2.1)
	Matice a vektory
např. $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$	matice rozměru (typu) $m \times n$, $m > 1, n > 1$ (tučně velkými písmeny)
např. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$	vektory rozměru $n \times 1$ (standard) nebo $1 \times n$, $n > 1$ (tučně malými písmeny)
	Množiny
$\dot{\cup}$	sjednocení disjunktních množin
$\lvert M \rvert$	mohutnost (kardinalita) množiny M
$\aleph_0$	spočetná mohutnost
I	obecná (jakákoliv) indexová množina
J	nejvýše spočetná úplně uspořádaná indexová množina, obvykle $J = \mathbb{N}$ nebo $J = \mathbb{Z}$ ($J \neq \emptyset$): viz 6.3

K	konečná indexová množina ($K \neq \emptyset$)
$\exp X$	množina všech podmnožin množiny X
	Funkce
$\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n\in J}$	posloupnosti
pro s. v. $n \in J$	pro skoro všechna $n \in J$ neboli pro všechna $n \in J$ až na konečně mnoho
$\mathbb{F}^J$	množina všech číselných posloupností (zobrazení $J \to \mathbb{F}$)
$\sum a_n$, $\sum_{n\in J} a_n$	sumace řady
např. f, g, h	komplexní funkce reálného argumentu ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$), není-li řečeno jinak
$f(t)$	hodnota funkce f v bodě $t \in \mathbb{R}$ (jen pro $n = 1$)
$f(\boldsymbol{t}) := f(t_1, \dots, t_n)$	hodnota n-rozměrné funkce f v bodě $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$
$f(\boldsymbol{t}) := [f(t_1), \dots, f(t_n)]$	hodnota skalární funkce f po složkách vektoru $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^n$ (rozměr $\boldsymbol{t}$ je zachován)
$\operatorname{supp} f := \{\boldsymbol{t} \mid f(\boldsymbol{t}) \neq 0\}$	nosič funkce f
$1_S(\boldsymbol{t}) := \begin{cases} 1 & \text{pro } \boldsymbol{t} \in S \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$	charakteristická funkce podmnožiny $S \subseteq \mathbb{R}^n$
$\delta(t)$	Diracova „funkce“ jakožto slabá limita funkcionálů v teorii zobecněných funkcí (distribucí): $\delta(t) := \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} 1_{(-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2})}(t)$, $\int_{\mathbb{R}} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$
$\delta_{m,n} := \begin{cases} 1 & \text{pro } m = n \\ 0 & \text{pro } m \neq n \end{cases}$	Kroneckerův symbol ($m, n \in \mathbb{Z}$)
	Lebesgueův integrál
$\int_M f(t)\,\mathrm{d}t$	integrál f na měřitelné množině M, kde integrál i měřitelnost je v Lebesgueově smyslu
$\int f(t)\,\mathrm{d}t := \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$	Lebesgueův integrál f na $M = \mathbb{R}$
$\int_M f(t)\,\mathrm{d}F(t)$	Lebesgueův–Stieltjesův integrál na M
$\int_M f(t)\,\mathrm{d}\mu(t)$	Lebesgueův integrál s obecnou mírou μ na M
s. v. na M	skoro všude na M, neboli pro všechna $t \in M$ s výjimkou podmnožiny nulové míry
$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in M} f(t)$	esenciální supremum funkce f na M: $\operatorname*{ess\,sup}_{t\in M} f(t) := \inf\{C \mid f \leq C \text{ s. v. na } M\}$
	Prostory a jejich prvky
např. $X, Y, X_1, Y_1, X_2, Y_2 \dots$	prostory: neprázdné množiny opatřené nějakou strukturou
$x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 \dots$	prvky výše uvedených prostorů
	Operátory
$\mathcal{F}(X, Y)$	prostor všech operátorů (zobrazení) $X \to Y$ (množiny)
např. $T \colon X \to Y$	(lineární) operátor neboli zobrazení zachovávající (lineární) strukturu (např. homomorfismus)
$T^{-1} \colon Y \to X$	(bijektivní) inverzní operátor k (bijektivnímu) operátoru T
$T \colon X \hookrightarrow Y$, $X \subseteq Y$	identické vnoření (inkluze) podmnožiny X do Y
$T(x)$ nebo stručně Tx	hodnota operátoru T v bodě x
$T(M)$	obraz množiny M v operátoru T
$T^{-1}(M)$	úplný vzor podmnožiny $M \subseteq Y$ v zobrazení $T \colon X \to Y$; $T^{-1}(M) := \{x \in X \mid Tx \in M\}$
$T^{-1}y := T^{-1}(\{y\})$	úplný vzor prvku $y \in Y$
I, I_X	identický operátor, na X
$\mathit{0}$, $\mathit{0}_X$	nulový operátor, na X ($\mathit{0}_X \colon X \to Y$)

Značení zavedené v textu

Následuje abecední seznam zkratek a symbolů spolu s odkazem do textu, kde byly zavedeny.

Značení	Popis	Odkaz do textu
$A_\Phi \le R_\Phi, S_\Phi \le B_\phi$	nejlepší meze framu/Rieszovy báze Φ	6.53
α_T, β_T ($\alpha_T \le T \le \beta_T$)	nejlepší meze (kvadratické formy) operátoru T	3.48, 3.51
B-prostor: $B, B_1, B_2 \ldots$	Banachův prostor	2.57
$\mathcal{B}(X, Y)$	prostor ohraničených lineárních operátorů	3.3
BSV	Banachova–Steinhausova věta	3.21
$C(\mathcal{I})$	prostor funkcí spojitých na $\mathcal{I}$	2.83
DCK	diskrétní cyklická konvoluce	C.28
DFT	diskrétní Fourierova transformace	C.5, C.10, C.12
DLK	diskrétní lineární konvoluce	C.28
d_X	metrika na X	2.35
$\mathcal{D}(T)$	definiční obor operátoru T	2.3
$\Delta(t)$	trojúhelníkový puls	C.23
$\Delta = \{\Delta_n\}_{n\in J}$	rozdílová Besselova posloupnost	6.74
$\dim X$	dimenze prostoru X	2.2
$\mathcal{E} = \{\varepsilon_n\}_{n\in J}$	přirozená ONB v ℓ^2	2.89
FFT	rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Tr.)	C.7
FŘ	Fourierova řada	2.92, C.1
$\mathbb{F}$	pole skalárů, kde buď $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$	2.1
$\gamma(M)$	hranice množiny M (v topologii)	2.18
H-prostor: $H, H_1, H_2 \ldots$	Hilbertův prostor	2.71
H^2_+, H^2_-	Hardyho prostory	2.114
HBV	Hahnova–Banachova věta	3.13
IMT	věta o inverzním zobrazení (Inverse Mapping Th.)	3.8
$\mathrm{Int}(M)$	vnitřek množiny M (v topologii)	2.18
$K(s, r)$	otevřená koule o středu s a poloměru r	2.35
$K(x, y)$	jádrová funkce (jádro) RKHS-prostoru	8.2, 8.5
L-izomorfismus	lineární izomorfismus	2.7
L-(pod)prostor	lineární (vektorový) (pod)prostor	2.1
L^p, ℓ^p	p-prostory	2.83, 2.84, 2.87, B.8
$\widetilde{L}^p_T$	p-prostor T-periodických funkcí	2.118, C.2.1
ℓ_N	prostor N-periodických posloupností	C.2.2
$\mathcal{L}_\mathbb{F}$	lineární struktura vektorového prostoru nad $\mathbb{F}$	2.1
$\mathcal{L}(M)$	lineární obal množiny M	2.1
$\mathcal{L}(X, Y)$	prostor lineárních operátorů z X do Y	2.3
$\mathcal{LI}(X, Y)$	prostor lineárních izomorfismů z X na Y	2.7
M-(pod)prostor	metrický (pod)prostor	2.35
ML-prostor	metrický lineární prostor	2.50
NL-prostor	normovaný lineární prostor	2.54
$\mathcal{N}(T)$	jádro (nulový prostor) operátoru T (null space)	2.3
$\mathcal{O}$, $\mathcal{O}^*$	otevřené okolí, ryzí (v topologii)	2.18
OGS	ortogonální systém (množina)	2.74
OMT	věta o otevřeném zobrazení (Open Mapping Th.)	3.7
ONS, ONB	ortonormální systém (množina), báze	2.74
PW-prostor	Paleyho–Wienerův prostor	2.109
PI	Parsevalova identita	6.32, C.1.1

$\mathcal{P}_T$	prostor T-periodizovatelných funkcí	2.121
RB	Rieszova báze	6.40
$\mathrm{rect}(t)$	tzv. obdélníková funkce	(C.19)
RFV	Rieszova–Fischerova věta	6.32
RVR	Rieszova věta o reprezentaci	3.19
$\mathcal{R}(T)$	obor hodnot operátoru T (range space)	2.3
$\mathcal{R}^{\dagger}, \mathcal{R}^{\dagger}_{\varPhi}$	obor hodnot souřadnicového zobrazení v bázi $\varPhi$	6.16
RKHS-prostor	H-prostor s reprodukčním jádrem (kap. 8)	8.3
$\underline{X}$, $\{\boldsymbol{x}\}$, $[\{\boldsymbol{x}\}]$, $L_K[\boldsymbol{y};\boldsymbol{\alpha}]$, $\mathcal{L}(K)$, $K[\boldsymbol{y}]$	symboly používané v kap. 8	8.1
$\mathrm{sinc}(t) := \frac{\sin \pi t}{\pi t}$	funkce sinc (sinus cardinalis)	2.91(b), C.23
SVD	singulární rozklad matice	5.13
T-(pod)prostor	topologický (pod)prostor	2.18, 2.25
TF-prostor	prostor funkcí koncentrovaných v čase i frekvenci	2.104
TL-prostor	topologický lineární prostor	2.49
TLI	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\mathcal{TLI}(X, Y)$	prostor všech TLI z X na Y	2.58
$\mathcal{T}_X$	topologie na X	2.18
$\mathcal{T}(\mathcal{S})$	nejmenší topologie obsahující $\mathcal{S}$	2.22
UI	unitární izomorfismus	3.90
VS-prostor	prostor s vnitřním součinem	2.66

Operační symbol	Popis	Odkaz do textu
$\kappa(T)$	číslo podmíněnosti operátoru T	5.11
X', $x' \in X'$	duální prostor k X spojitých lin. funkcionálů x'	3.12
y', $\varPhi'$, $\varPhi^{`}$	duální prvek, duální frame/Rieszova báze	6.63, 6.64, 6.75
$\hat{x} := \mathcal{F}^{-}x$	Fourierova transformace x (nebo ortogonální projekce x — viz níže)	2.98, C.12
$\check{x} := \mathcal{F}^{+}x$	zpětná Fourierova transformace x	2.98, C.12
$\Diamond$	fourierovský transformační pár	2.102
$\circ$	Hadamardův součin (po složkách)	B.16, C.33
$\times, \prod$	kartézský součin (nebo korelace — viz níže)	2.10
$\xrightarrow{d}$	konvergence dle metriky d	2.35
$\xrightarrow{\text{sl.}}$, $\xrightarrow{\text{sl'.}}$	konvergence slabá	3.23
$\rightrightarrows$	konvergence stejnoměrná	2.85
$\xrightarrow{\mathcal{T}_X}$	konvergence v topologii na X	2.33
$*, \circledast$	konvoluce, periodická	C.15, C.28
$\times, \otimes$	korelace, periodická	C.15, C.28
$\overset{\mathrm{L}}{\simeq}$	lineární izomorfismus	2.7
$\overset{\mathrm{L}}{\subseteq}, \overset{\mathrm{L}}{=}$	lineární podprostor, shoda L-prostorů	2.1
$\mathbb{W}^{\pm}_{N}$	matice operátoru DFT	C.5
$\boldsymbol{T}^*$	matice (hermitovsky) transponovaná k $\boldsymbol{T}$	3.38
$[T]$	maticová reprezentace operátoru T	2.14
$\lVert\cdot\rVert, \lVert\cdot\rVert_X$	norma, na X	2.54, B.20(2)
T', T^*	operátor adjungovaný k T	3.32, 3.34
D_s	operátor dilatace	3.1
$L_{\varPhi}$	operátor diskretizační (Besselův) v bázi/framu $\varPhi$	6.28
$\mathrm{DFT}^{\pm}_{N}$	operátor diskrétní Fourierovy transformace	C.5

$\mathcal{F}_1^{\pm}$	operátor Fourierovy transformace v L^1	2.95, C.10
$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{\pm}, \mathcal{F}_2^{\pm}$	operátor Fourierovy transformace v L^2	2.98, 3.1, C.12
S_{Φ}	operátor framový v bázi/framu Φ	6.28
T_B	operátor Fredholmova typu s jádrem B	B.18, 3.10
$f \to \widetilde{f}$	operátor involuce	3.1
$f \to \bar{f}$	operátor konjugace	3.1
R_{Φ}	operátor korelační (Gramův) v bázi/framu Φ	6.28
e_a	operátor modulace	3.1
P, P_H	operátor ortogonální projekce, na podprostor H	3.65
$T_h := T_h^-$, $\widetilde{T}_h := \widetilde{T}_h^-$	operátor konvoluce, periodické (s imuplzní odezvou h)	C.15, C.28, 3.10
T_h^+, $\widetilde{T}_h^+$	operátor korelace, periodické (s imuplzní odezvou h)	C.15, C.28
T^+	operátor Mooreovy–Penroseovy pseudoinverze k T	5.1
T^-	operátor zobecněné inverze k T	5.15
R	operátor reflexe	3.1
T_{Φ}	operátor rekonstrukční v bázi/framu Φ	6.16, 6.28
τ_b	operátor translace (posunutí)	3.1
$\sqrt{T}$	operátorová odmocnina z T	3.62
$\perp$	ortogonalní na, kolmý na	2.68
$M^{\perp}$	ortogonální komplement množiny M	2.73
$\widehat{x} := P_H x$	ortogonální projekce x na podprostor H	3.64, 3.65
$x^{\perp} := x - P_H x$	kolmá složka ortogonální projekce x na H	3.66
$\oplus, \bigoplus$	ortogonální součet podprostorů	2.72
$\lVert\cdot\rVert_p$	p-norma	2.83, 2.84, B.1
$x^+ := T^+ y$, $x^- := T^- y$	pseudoinverzní řešení rovnice $Tx = y$	5.4, 5.15
$\dot{+}, \dot{\sum}$	přímý součet podprostorů	2.5, A.5, 2.63
$\dot{T}$	restrikce operátoru T na $\overline{\mathcal{R}(T^*)}$	4.2
T^L	restrikce operátoru T na podprostor L, který je k němu invariantní	7.20
$+, \sum$	součet podprostorů	A.5
$\{x\}_{\Phi}$	souřadnice prvku x v bázi Φ	6.16
$\langle \cdot, \cdot \rangle, \langle \cdot, \cdot \rangle_X$	vnitřní (skalární) součin, na X	2.66, B.20(2)
T_{λ} ($R_{\lambda} := T_{\lambda}^{-1}$)	spektrální teorie: operátory (rezolventa)	7.1
$\sigma(T)$	spektrum operátoru T	7.2
$C\sigma(T)$	spojité spektrum operátoru T	7.2
$P\sigma(T)$	bodové spektrum operátoru T	7.2
$R\sigma(T)$	reziduální spektrum operátoru T	7.2
$\mathcal{R}_{\lambda}, \mathcal{N}_{\lambda}, \mathcal{N}$	spektrální teorie: prostory	7.1, 7.25
$\overset{\mathrm{TLI}}{\simeq}$	topologický lineární izomorfismus	2.58
$\overset{\mathrm{UI}}{\simeq}$	unitární izomorfismus	3.90
$\overline{M}$	uzávěr množiny M (v topologii)	2.18
$\mathrm{Int}(M)$	vnitřek množiny M (v topologii)	2.18

Kapitola 1
Úvod

Aparát *funkcionální analýzy* je v současnosti matematickým základem mnoha moderních metod aplikované matematiky, které významným způsobem přispívají k rozvoji celé řady dalších vědních oborů. Týká se to především oblasti *zpracování signálů*, která v posledních desetiletích prochází revolučními změnami v přístupu k reprezentaci signálů. Historicky dominantní roli hrála dlouhá léta *Fourierova analýza* spočívající v rozkladu signálu na sinusové kmity z jeho frekvenčního spektra, každý určený svojí amplitudou, frekvencí a fázovým posuvem. Již od roku 1910 bylo ale známo, že sinusový průběh není jediný vhodný stavební blok pro reprezentaci signálu. Pro signály pulzního charakteru se ukázal jako vhodnější rozklad na obdélníkové kmity — tzv. *Haarův systém*. Vzhledem k nedostatečné hladkosti bylo ale jeho použití značně omezeno. Průlom nastal až v 80. letech minulého století s příchodem waveletových technik, kde stavebním blokem je tlumeně oscilující funkce předepsané hladkosti (*vlnka*, *wavelet*) určená amplitudou, měřítkem (hraje roli změny frekvence) a posuvem. Signál je rozkládán do tzv. *waveletového spektra*. Haarův systém se tak stal jedním z mnoha speciálních případů waveletových systémů (nejnižší hladkost: *Haarova vlnka* je po částech konstantní funkce).

Klasickou matematickou disciplínou zkoumající funkce (signály) je *matematická analýza*, která je standardní součástí základních kurzů matematiky. Pro ni je typický analytický přístup zaměřený především na lokální popis a chování každé konkrétní funkce určitého typu: spojitost, monotonie (první derivace), tvarové charakteristiky jako konvexnost nebo konkávnost (druhá a vyšší derivace), plocha pod grafem průběhu funkce (určitý integrál) apod. Funkcionální analýza se naopak koncentruje na strukturní charakteristiky společné určité třídě (prostoru) funkcí a zkoumání vztahů mezi nimi (operátory). V tomto textu se omezíme na *lineární funkcionální analýzu*, kam spadá většina aplikací a kde pracujeme s lineárními prostory funkcí a lineárními vztahy mezi nimi. Z tohoto pohledu lze například pohlížet na derivaci jako na lineární zobrazení (operátor) přiřazující funkci f jinou funkci f'. Tento odlišný přístup se promítá i do způsobu parametrizace funkce f. V matematické analýze konkrétní funkci $f(t)$ typicky zadáváme analytickým předpisem $f(t; \beta_1, \ldots, \beta_n)$ pomocí jejích vnitřních parametrů $\beta_1, \ldots, \beta_n$, který je obecně nelineární. Naopak lineární funkcionální analýza, vyjadřuje f typicky jako lineární kombinaci $f(t) = \sum_n \xi_n \psi_n(t)$ v pevně zvoleném systému funkcí $\{\psi_n\}$ generujících prostor, do něhož f strukturně náleží. Funkci f tak získáváme jako obraz $f = T(\xi)$ v lineárním operátoru

T přiřazujícím posloupnosti koeficientů $\xi := \{\xi_n\}$ funkci f (např. vyjádření periodické funkce pomocí rozvoje do její Fourierovy řady). Takový operátor T můžeme označit za *syntezující*, zatímco operátor L hledající k dané funkci příslušné koeficienty $\xi = L(f)$ můžeme označit za *analyzující*. Ten poskytuje vlastně řešení inverzní úlohy (stejně jako $L := T^{-1}$ řeší soustavu lineárních rovnic s regulární maticí soustavy odpovídající T). Je zřejmé, že vlastnosti operátoru T (resp. generujících funkcí ψ_n) determinují jednoznačnost, resp. numerickou stabilitu výpočtu koeficientů ξ.

Pro ilustraci vezměme 1-periodickou funkci $A\cos(2\pi t - \varphi), t \in \mathbb{R}$, která je stavebním kamenem ve Fourierově analýze. Ta je vnitřně nelineárně parametrizována amplitudou $A \in \mathbb{R}$ a fázovým posuvem $0 \leq \varphi < 2\pi$. Jednoduchou úpravou dostáváme dvě alternativní lineární parametrizace (goniometrický a komplexní tvar):

$$A\cos(2\pi t - \varphi) = a\cos(2\pi t) + b\sin(2\pi t) = \bar{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi t} + c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi t},$$

kde $a := A\cos(\varphi)$, $b := A\sin(\varphi)$ a $c := \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}b)$. Transformační vztahy $(A,\varphi) \mapsto (a,b) \mapsto c$ odpovídají přechodu od polárních ke kartézským souřadnicím a případně dále do komplexní roviny. Zpětný přechod k amplitudově-fázovému tvaru je dán vztahy $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ a $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$. Vidíme tedy, že prostor kosinových funkcí $\{A\cos(2\pi t - \varphi) \mid A \in \mathbb{R}, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ je dvourozměrný s bázovými funkcemi $\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)$.

Zmíníme stručně některé vybrané oblasti aplikací lineární funkcionální analýzy. Tradičně nacházela použití např. při řešení diferenciálních a integrálních rovnic [10, kap. 5 a 6, s. 223–336] a v kvantové mechanice [10, kap. 7, s. 337–416]. V průběhu času se stala matematickým základem mnoha moderních metod aplikované matematiky, které významným způsobem přispívají k rozvoji celé řady dalších vědních oborů. Jako typické oblasti aplikací můžeme zmínit polynomy a splajny (používané např. ve vyhlazování dat či 3D modelování), fourierovské spektrální rozklady, které hrály dlouhá léta nezastupitelnou roli v mnoha inženýrských aplikacích. Ty se dále vyvinuly v obecnější časově-frekvenční systémy vlnkového nebo Gaborova typu (využité např. v seismologii nebo v moderních kompresních formátech pro obrazy a video). Vývoj se však nezastavil a pokračoval ještě obecnějšími systémy typu „frame“ (volně přeložitelné jako kostra), které se vyznačují větší pružností při reprezentaci signálů (rozsáhlých dat). Současné technické možnosti nabízí k analýze extrémně rozsáhlé datové soubory sbírané v nejrůznějších oblastech, a právě tyto systémy umožňují taková data efektivně zpracovávat.

Pro úplnost uvedeme základní charakteristiky vybraných funkcionálních systémů:

Polynomy. Prostor polynomů stupně nejvýše n je již vnitřně parametrizován lineárně: $p(t) = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n$ jako lineární kombinace tzv. *homogenních polynomů* t^k, $k = 0, 1, \ldots, n$. Přesto tato reprezentace není z numerického hlediska nejvýhodnější, protože generátory t^k sice tvoří bázi, ale sousední generátory t^k, t^{k+1} vykazují pro velké hodnoty k, typicky na intervalu $[0, 1]$, takřka shodný průběh, tj. jsou „skoro“ lineárně závislé. Z hlediska řešení inverzní úlohy (výpočet koeficientů) se tak jedná o špatně podmíněnou úlohu (na diskrétní síti s $n + 1$ uzly je třeba invertovat tzv. Vandermondovu matici, jejíž determinant se blíží k nule s rostoucím n). Byly proto navrženy jiné bázové systémy, které jsou vesměs v jistém smyslu ortogonální a těmito neduhy netrpí. Nejběžnější z nich jsou známy pod označením *Jacobiho, Čebyševovy, Legendrovy, Laguerrovy* a *Hermitovy* polynomy. Detaily lze nalézt například v monografiích [69, kap. 6] a [8].

Splajny. Prostor po částech polynomických funkcí stupně nejvýše n s předepsanou hladkostí v pevně předepsaných bodech napojení, tzv. uzlech. Původní vnitřní parametrizace je dána souborem koeficientů jednotlivých polynomů spolu s podmínkami na hladkost [1]. Pozdější moderní přístupy [3] spočívají v nalezení báze tzv. *B-splajnů* tohoto prostoru umožňující každý splajn vyjádřit jako lineární kombinaci B-splajnů.
Fourierova řada [21, kap. 13, s. 429–454]**.** Libovolnou T-periodickou[1] funkci s konečnou variací[2] ($T > 0$) lze dle známé *Dirichletovy věty* rozvinout do Fourierovy řady, kde stavebními bloky jsou kosinové funkce $A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n)$ kmitající na harmonických frekvencích $n = 1, 2, 3, \ldots$, tj. s periodami $T, \frac{T}{2}, \frac{T}{3}, \ldots$ Podobně jako výše lze pak Fourierovu řadu funkce $f(t)$ zapsat v amplitudově-fázovém, goniometrickém nebo komplexním tvaru:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \cos(2\pi nt/T - \varphi_n) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cos(2\pi nt/T) + b_n \sin(2\pi nt/T) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nt/T},
\end{aligned}
$$

kde poslední komplexní tvar je použitelný i pro rozvoj T-periodické komplexní funkce a v případě reálné funkce vykazuje symetrii koeficientů $c_{-n} = \bar{c}_n, c_0 = \frac{a_0}{2}$. Fourierovy řady představují klasické téma, takže ke studiu existuje široký výběr vhodných specializovaných studijních textů, např. [30] nebo novější [31].
Waveletová řada [21, kap. 12, s. 351–428]**.** Waveletový systém je množina funkcí $\{a^{n/2}\psi(a^n t - kb)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ pro pevné $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (základní vlnka) a parametry $a > 1$ (základní měřítko) a $b > 0$ (krok časového posunutí). Všechny bázové vlnky jsou tak pro každou dvojici (k, n) získány z mateřské vlnky změnou jejího měřítka a^n a posunutím kb. Je zřejmá analogie s Fourierovou řadou, kde $\psi(t) = \cos(t)$ (základní vlna), $a = \frac{2\pi}{T}$ je základní měřítko a φ_k posuv v roli kb. Existuje velké množství publikací věnovaných teorii waveletů, např. klasická monografie od Ingrid Daubechies [9], která znamenala zásadní přínos zkonstruováním waveletového systému s mnoha dobrými vlastnostmi (s omezeným nosičem aj.). Zajímavou publikaci představuje [27], kde je dokonce popsána konstrukce splajnových waveletů (každá vlnka je splajn). Aplikačně užitečná může být kniha [52].
Gaborova řada [21, kap. 11, s. 301–350]**.** Systém má tvar $\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi ant} g(t - kb)\}_{k,n\in\mathbb{Z}}$ pro pevnou (neoscilatorickou) funkci $g \in L^2(\mathbb{R})$ (základní okno) a parametry $a > 0$ (základní frekvence) a $b > 0$ (krok posunutí). Všechny bázové vlnky jsou tak pro každou dvojici (k, n) získány ze základního okna frekvenční modulací o frekvenci na a posunutím kb. Frekvence oscilace je zde na rozdíl od waveletového systému řízena přímo modulačním členem a nikoli změnou měřítka oscilatorické základní vlnky. K systematickému studiu lze doporučit například [16].

[1] Na rozdíl od značení použitého výše zde T reprezentuje periodu signálu, tedy kladné číslo, nikoliv operátor.

[2] Frekvence kmitů nesmí růst nade všechny meze, např. funkce $\sin\frac{1}{t}$ nemá konečnou variaci na intervalu $(0, 1]$.

Framy [21, kap. 8, s. 203–246]**.** *Frame*[3] je systém dále zobecňující výše uvedené přístupy do abstraktnější podoby. Počátky sahají k práci [13], nedávné monografie [25, 26] jsou vhodné pro ucelené systematické studium. Frame rovněž generuje celý prostor, ale může být bohatší než báze (obvykle sjednocení několika známých bází) a přitom rovněž umožňující reprezentovat funkci pomocí rozvoje do nekonečné řady, ale nejednoznačně (nekonečně mnoha způsoby). Tato nejednoznačnost samozřejmě přináší numerickou nestabilitu při hledání rozvojů. Je proto třeba doplnit nějaká další omezení. Obvykle vystupuje požadavek najít pro danou funkci (nebo alespoň pro její dobrou aproximaci) rozvoj s co nejmenším počtem nenulových koeficientů, tzv. *řídký rozvoj* (v angličtině sparse). Zvýšená výpočetní náročnost je bohatě kompenzována větší flexibilitou, neboť řídká reprezentace vlastně představuje výběr optimální konečné subbáze pro danou funkci. V poslední době probíhá intenzivní výzkum jednak v teoretické rovině (jak poznat, že funkce má řídkou reprezentaci v daném systému), tak i v rovině algoritmické (jak takový řídký rozvoj nalézt) — viz například starší článek [24], který podnítil další výzkum v této oblasti. Přehledová práce [7] stručně shrnuje aktuální stav, stejně jako monografie [14] detailně popisující celou škálu existujících algoritmů. Existují i adaptivní techniky umožňující přizpůsobit i výběr samotného framového systému pro danou funkci, který by umožnil co nejřidší reprezentaci. K prvnímu seznámení s problematikou framů a řídkých rozvojů jsou vhodné publikace [50, 23, 22, 41], které jsou dostupné ke stažení v elektronické podobě a kde čtenář nalezne další odkazy.

Tato monografie je první českou publikací, která podává konzistentní výklad zmíněných pokročilých technik. Tím doplňuje dostupné české zdroje, např. kvalitní učební texty k přednáškám na Karlově univerzitě v Praze:
https://www.booktook.cz/p/uvod-do-funkcionalni-analyzy/
https://www.databazeknih.cz/knihy/uvod-do-funkcionalni-analyzy-461751
https://www.megaknihy.cz/matematika/198960-zapisky-z-funkcionalni-analyzy.html
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/pages/fa.php#
https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~spurny/doc/ufa/funkcionalka.pdf
V angličtině sice obdobné publikace k nalezení jsou, ale obvykle nepropojují teorii s příklady aplikací. Tato monografie je první svého druhu koncipovaná s cílem zmiňovanou mezeru zaplnit. Sestává z devíti kapitol a osmi příloh.

Klasická témata úvodního kurzu pokrývají kapitoly 2–4 spolu s volitelnými rozšiřujícími přílohami A–C. Cílem však není podat jejich vyčerpávající výklad, ale slouží jako základní teoretická podpora pro náročnější moderní partie z kapitol 5–9 zmíněné dále.

Čtenář zde tedy najde množství odkazů do existující české i anglické literatury, kde může dohledat podrobnosti (detaily důkazů aj.). Je samozřejmě možné je využít i pro běžné úvodní přednášky z funkcionální analýzy v magisterském studiu. Vybraní studenti pak mohou plynule navázat kapitolami 5–9 v doktorském studiu dle jeho konkrétního zaměření.

Kapitoly 5–9 spolu s přílohou F představují jádro celé monografie (přibližně polovinu celkového rozsahu) a jsou zaměřeny na moderní partie zahrnující pseudoinverzní operátory, framy a RKHS-prostory (Hilbertovy prostory s reprodukčním jádrem:

[3] Přejímáme tento pojem z angličtiny, jelikož si ani nejsme vědomi ekvivalentu v české literatuře, ani jsme vhodný překlad nenalezli.

RKHS — Reproducing Kernel Hilbert Space) pro potřeby náročných aplikací z oblasti zpracování signálů, redukce parametrů v modelech, strojového učení a umělé inteligence s předpokládaným využitím při přípravě mezioborově orientovaných doktorandských kurzů. Tato pokročilá témata jsou přitom vyložena ve vzájemných souvislostech, které nejsou zřejmé a jen obtížně dohledatelné ve specializované literatuře. Kapitola 9, ale v menší míře i kapitoly předchozí, zahrnují řadu příkladů z oblasti zpracování signálů a souvisejících úloh.

Do přílohy D byly zařazeny rozsáhlejší nebo technicky komplikované důkazy některých tvrzení, včetně interaktivních vazeb do hlavního textu, kde je jejich přesné znění uvedeno. Při prvním čtení je možno je přeskočit a vrátit se k nim později. Naopak důkazy začleněné do hlavního textu přispívají k porozumění látce a pochopení širších souvislostí. Některé jsou přenechány za cvičení čtenáři, přičemž náročnější jsou po straně označeny hvězdičkou $*$. K vybraným cvičením lze dohledat řešení v příloze E. Příloha G shrnuje obsah celé knihy ve čtyřech přehledných tabulkách. Závěrečná příloha H obsahuje seznam souborů, které jsou k dispozici v online repozitáři jako doplněk ke knize.

Pro usnadnění studia je text na začátku doplněn o seznam použitých symbolů, zkratek a označení.

Monografie je tedy zajímavá jak pro teoretiky (výzkumníky i učitele — podle monografie lze vybudovat kurz či seminář), tak pro inženýry, zejména z oblasti telekomunikací a zpracování signálů, i další specialisty zabývající se například problematikou dolování z dat (data mining) metodami strojového učení (neuronové sítě aj.), statistickými přístupy a dalšími.

Kapitola 2
Prostory

Reálnými prvky okolního světa jsou body v trojrozměrném prostoru E_3. V tomto, tzv. **euklidovském prostoru**, lze zavést vektorovou geometrii: **vektor** udává orientovaný směr od jednoho bodu k jinému.

Není tedy nijak překvapující snaha tyto objekty formálně kvantifikovaně popsat. Zvolíme-li v prostoru pevně nějaký bod (**počátek**) a tři na sebe kolmé směry (**souřadné osy**), je možno každý bod (resp. vektor $\boldsymbol{x}$ směřující od počátku k tomuto bodu) popsat jednoznačně trojicí jeho souřadnic $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]$ (kolmé průměty $\boldsymbol{x}$ na souřadné osy). Každá rovina (resp. přímka), procházející počátkem pak představuje dvojrozměrný (resp. jednorozměrný) euklidovský podprostor E_2 (resp. E_1) v E_3.

Geometrickému sečítání a násobkům vektorů odpovídají příslušné operace s jeho souřadnicemi (sečítání a násobení skalárem po složkách). Tímto způsobem je v množině E_3 zavedena lineární struktura — dostáváme matematickou strukturu nazývanou **lineární (vektorový) prostor**.

Euklidovská geometrie však umožňuje také měřit vzdálenost dvou bodů, což vede k pojmům **metrika** a **metrický prostor**. Odtud je odvozena délka vektoru nazývaná **norma** jako vzdálenost jeho koncových bodů. Spolu s konzistentní lineární strukturou tak dostáváme pojem **normovaného lineárního prostoru**.

Z hlediska geometrie už zbývá jen zavést operaci, která umožní spočíst (orientovaný) úhel mezi dvěma vektory $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$. Tou je operace nazývaná **skalární (vnitřní) součin**: $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$. Na vrchol strukturální pyramidy (viz obr. 2.1) se tak dostává **prostor s vnitřním součinem**, též nazývaný **unitární prostor**. Ten představuje strukturu zachycující vyčerpávajícím způsobem všechny podstatné vlastnosti geometrie euklidovského prostoru. Pomocí euklidovské metriky se dostáváme ke strukturálnímu pojmu **euklidovské topologie** zavádějící např. pojmy **otevřená množina** (sjednocení otevřených koulí), **uzavřená množina** (komplement otevřené množiny), spojitost, konvergence aj. Množina opatřená topologickou strukturou se nazývá **topologický prostor**. Přidáme-li k topologickému, resp. metrickému prostoru konzistentním způsobem i lineární strukturu, dostáváme **topologický lineární**, resp. **metrický lineární prostor**.

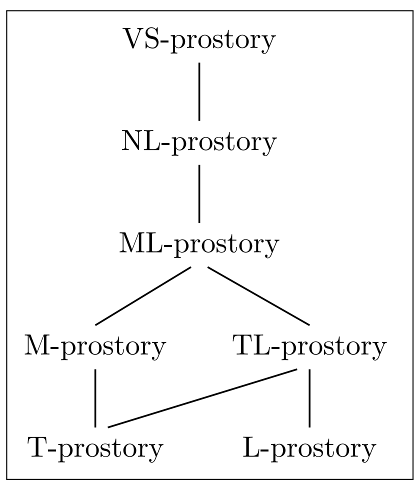
Strukturu prostoru E_3 lze dále přirozeným způsobem rozšířit do libovolné konečné dimenze $N \in \mathbb{N}$ na N-rozměrný euklidovský prostor E_N, jehož prvky jsou uspořádané N-tice reálných nebo dokonce komplexních čísel $[x_1, x_2, \ldots, x_N]$. Ukazuje se, že všechny podstatné vlastnosti zůstávají v platnosti.

Kvalitativní změna nastává až přechodem k prostorům nekonečné dimenze: prostor posloupností $\{x_n\}_{n\in J}$, $|J| = \aleph_0$, resp. prostor funkcí $\{f(t)\}_{t\in\mathcal{J}}$ definovaných na vhodném definičním oboru $\mathcal{J}$ (obvykle $\mathcal{J} \subseteq \mathbb{R}$ je interval reálných čísel). V tomto případě je třeba omezit výběr posloupností, resp. funkcí. Obvykle předpokládáme určitý typ absolutní sumovatelnosti, resp. absolutní integrovatelnosti. I tak jsou nekonečně rozměrné prostory natolik bohaté, že některé vlastnosti lze z konečně rozměrného prostoru přenést pouze po přidání dalších omezujících podmínek. Tyto rozdíly budou konkrétně diskutovány v dalším textu.

Výše zmíněné prostory jsou speciálním případem **algebraických struktur**, viz [15], [65, odst. 2 a 3] a [34, kap. 1], které představují abstraktní konstrukci, umožňující přenášet vybrané strukturní vlastnosti euklidovského prostoru (nejjednodušší je reálná přímka E_1) i na množiny s jinými prvky, nicméně podobného charakteru. Nepřeneseme-li vlastnosti všechny, ale jen některé, část strukturních rysů reálné přímky ztratíme, některé však zůstanou zachovány, což se týká např. výše zmíněných topologických (lineárních) nebo metrických (lineárních) prostorů.

2.1 Hierarchie prostorů

Obrázek 2.1 znázorňuje schematicky hierarchii prostorů, které budou vystupovat v dalších úvahách. Vede-li v tomto schématu cesta po hranách grafu od nějaké struktury dolů k jiné, pak výše umístěná struktura automaticky vynucuje (pod)strukturu umístěnou níže. Například každý prostor s vnitřním součinem je také normovaným lineárním prostorem, ten metrickým lineárním prostorem atd. Vlastnostmi různých typů prostorů se budeme nyní zabývat.



Obrázek 2.1: Schéma hierarchie prostorů.

2.1.1 Vektorové prostory (lineární prostory, L-prostory)

Definice 2.1. (podrobně viz [65, definice 3.1])
Množina X opatřená níže uvedenou lineární strukturou se nazývá **lineární (vektorový) prostor (L-prostor)** nad polem skalárů $\mathbb{F}$, kde $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nebo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:
$X := (X, \mathcal{L}_{\mathbb{F}})$, kde $\mathcal{L}_{\mathbb{F}} = \{+, \{\alpha_c\}_{c\in\mathbb{F}}\}$,
$(x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2$ (abelovská grupa),
$\alpha_c \colon x \longmapsto cx$ (násobení skalárem, distributivní a asociativní).

- $\emptyset \neq M \subseteq X$ **(lineárně) nezávislá**:
  $\sum_{k\in K} c_k x_k = 0 \Rightarrow c_k = 0 \; \forall\, k \in K,\; x_k \in M,\; k \in K,\; |K| < \infty$
- $\emptyset \neq Y \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X$ (lineární) **podprostor** (L-podprostor):
  $y_1, y_2 \in Y \Rightarrow y_1 + y_2 \in Y; y \in Y, c \in \mathbb{F} \Rightarrow cy \in Y$
- **Lineární obal podmnožiny** $M \subseteq X$:
  $\mathcal{L}(M) := \bigcap\big\{Y \mid M \subseteq Y \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X\big\} = \big\{\sum_{k\in K} c_k x_k \mid c_k \in \mathbb{F}, x_k \in M, |K| < \infty\big\}$
  Je-li $X = \mathcal{L}(M)$, říkáme, že M **generuje** X
- $\emptyset \neq B \subseteq X$ **báze** v X (cvičení 2.17(1))
  = maximální nezávislá podmnožina v X
  = minimální podmnožina generující X ($\mathcal{L}(B) = X$)
  = lineárně nezávislá podmnožina generující X.

Věta 2.2. Jestliže B je báze a $m := |B| < \infty$, potom všechny báze X mají tutéž mohutnost a $\dim X := m$ se nazývá **(konečnou) dimenzí prostoru** X. Jestliže $m = \infty$, značíme $\dim X = \infty$ a X nazýváme **nekonečně dimenzionálním prostorem**.

Definice 2.3 (**Lineární operátor**, **sdruženě lineární operátor**[1]**).**
$T \colon X \to Y$ (píšeme $T \in \mathcal{L}(X, Y)$):
$T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$, $T(cx) = c\,Tx \;\; \forall c \in \mathbb{F}$ ($T(cx) = \bar{c}\,Tx$ v případě $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

- **definiční obor** operátoru T: $\mathcal{D}(T) := X$,
- **obor hodnot**[2] operátoru T: $\mathcal{R}(T) := \{Tx \mid x \in X\} \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} Y$,
- **jádro (nulový prostor)**[3] operátoru T: $\mathcal{N}(T) := T^{-1}\{0\} \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X$.

Věta 2.4. (důkaz viz cvičení 2.17(2))
$T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $Y_1 \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} Y \Rightarrow T^{-1}(Y_1) \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X$ (speciálně i $\mathcal{N}(T)$) je L-podprostor v X.

Definice 2.5 (**Přímý součet** $\dot{+}, \dot{\sum}$**).** (dle přílohy A.5, viz též cvičení 2.17(7))
Prostor $X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n$ (nebo $X = \dot{\sum}_{i=1}^{n} X_i$) nazýváme **přímým součtem L-podprostorů** $X_i \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X$, jestliže platí $X = \mathcal{L}(\bigcup_{i=1}^{n} X_i)$ a $X_i \cap \mathcal{L}(\bigcup_{j\neq i} X_j) = \{0\}$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Věta 2.6. (viz A.7 a cvičení 2.17(8))
$X = X_1 \dot{+} \cdots \dot{+} X_n \;\Leftrightarrow\;$ pro každé $x \in X$ $\exists! x_i, i = 1, \ldots, n$: $x = x_1 + \cdots + x_n$.

---

[1] Též nazývaný **antilineární**.
[2] angl. range space
[3] angl. null space

Definice 2.7. $T\colon X \to Y$ se nazývá **lineární izomorfismus (L-izomorfismus)**, jestliže T je bijektivní lineární operátor (píšeme $T \in \mathcal{LI}(X, Y)$). Zřejmě pak $T^{-1}\colon Y \to X$ je rovněž lineární izomorfismus (důkaz jako cvičení 2.17(3)). Prostory X, Y se nazývají **lineárně izomorfní** ($X \overset{\mathrm{L}}{\simeq} Y$), jestliže existuje L-izomorfismus $X \to Y$.

Věta 2.8. (důkaz jako cvičení 2.17(4))
$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je injektivní právě když $\mathcal{N}(T) = \{0\}$. V takovém případě $X \overset{\mathrm{L}}{\simeq} \mathcal{R}(T)$.

Poznámka 2.9. Například regulární matice $\boldsymbol{T}$ rozměru $n \times n$ představuje lineární izomorfismus prostorů shodné konečné dimenze n. Její jádro je jednoprvková množina obsahující nulu, neboť právě pouze nulový vektor zobrazí na nulový vektor. Jádrem singulárních matic rozměru $n \times n$ je vždy netriviální podprostor $\mathbb{C}^n$, a proto nemohou hrát roli lineárního izomorfismu. Pro podrobnější charakterizaci lineárních operátorů v prostorech konečné dimenze viz příklad 4.15.

Věta 2.10. (viz A.8 a cvičení 2.17(8))
$X = X_1 \dotplus \cdots \dotplus X_n \overset{\mathrm{L}}{\simeq} X_1 \times \cdots \times X_n$ (kartézský součin L-prostorů: sečítání a násobení skalárem po složkách)

Věta 2.11. X L-prostor, $\dim X = n \Rightarrow X \overset{\mathrm{L}}{\simeq} \mathbb{F}^n$.

Důkaz. $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ báze v $X \Rightarrow T(\boldsymbol{\xi}) = \sum_j \xi_j b_j$ je lineární izomorfismus z $\mathbb{F}^n \to X$, $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ (podrobněji viz cvičení 2.17(5)). □

Poznámka 2.12. Vzhledem k této větě lze při pevně zvolené bázi konečně dimenzionálního prostoru X ztotožnit každý prvek $x \in X$ s vektorem jeho souřadnic v této bázi. A proto v dalším nemusíme rozlišovat mezi prvkem X a vektorem jeho souřadnic.

Poznámka 2.13. V Úvodu jsme viděli, že prostor funkcí $\{A\cos(2\pi t - \varphi)\}$ má bázi tvořenou funkcemi $\cos 2\pi t, \sin 2\pi t$. Zřejmým lineárním izomorfismem je v tomto případě vztah mezi tímto dvojrozměrným prostorem a prostorem $\mathbb{R}^2$ souřadnic.

Důsledek 2.14.
Lineární operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\dim X = n < \infty$, $\dim Y = m < \infty$ je jednoznačně určen maticí rozměru $m \times n$: $[T] := \boldsymbol{T} := [\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n] := [\tau_{ij}]$, $\boldsymbol{t}_j = T(b_j) = \sum_{i=1}^m \tau_{ij} b'_i$, kde $B = \{b_j\}$ a $B' = \{b'_i\}$ jsou libovolné, ale pevně zvolené báze po řadě v X a Y.

Důkaz. (podrobněji jako cvičení 2.17(6))
Operátory $U\colon \mathbb{F}^n \to X, V\colon \mathbb{F}^m \to Y$ jsou souřadnicové izomorfismy jako ve větě 2.11 $\Rightarrow [T] = V^{-1}TU\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ je lineární operátor, přičemž $T \mapsto [T]$ je zřejmě lineární bijekcí $\mathcal{L}(X, Y)$ na $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$, kde $x = U\boldsymbol{\xi} = \sum_j \xi_j b_j \Rightarrow y := Tx = TU\boldsymbol{\xi} = \sum_j \xi_j T b_j = \sum_j \xi_j \boldsymbol{t}_j = \sum_j \xi_j \sum_i \tau_{ij} b'_i = \sum_i \big(\sum_j \tau_{ij}\xi_j\big) b'_i \Rightarrow [T]\boldsymbol{\xi} = V^{-1}y = V^{-1}Tx = V^{-1}TU\boldsymbol{\xi}$. □

Poznámka 2.15. Vzhledem k tomuto důsledku lze při pevně zvolených bázích konečně dimenzionálních prostorů X a Y ztotožnit každý operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ s maticovým operátorem $[T]\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. Za této situace tedy nebudeme rozlišovat mezi operátorem a jemu příslušnou maticí $\boldsymbol{T} = [T]$.

Věta 2.16 (**Faktor prostor**). (viz A.2, A.3 a cvičení 2.17(7))
Každý L-podprostor $Z \overset{\mathrm{L}}{\subseteq} X$ definuje na X kongruenci $\sim$ ($x_1 \sim x_2 \;\Leftrightarrow\; x_2 - x_1 \in Z$), přičemž $[x] := \{x' \mid x' \sim x\}$ značí třídu kongruence obsahující prvek $x \in X$. Pak $X/Z := \{[x] \mid x \in X\}$ je tzv. **faktor prostor** X **dle** Z, kde speciálně pro $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je $X/T := X/\mathcal{N}(T) = \{T^{-1}(y) \mid y \in \mathcal{R}(T)\}$ a $X/T \overset{\mathrm{L}}{\simeq} \mathcal{R}(T)$.

Cvičení 2.17.
(1) Dokažte ekvivalenci tří charakterizací bází v definici 2.1.
(2) Dokažte větu 2.4.
(3) Dokažte, že inverze k lineárnímu izomorfismu dle definice 2.7 je rovněž lineární izomorfismus.
(4) Dokažte větu 2.8.
(5) Zdůvodněte podrobně platnost implikace v důkazu věty 2.11.
(6) Zdůvodněte podrobně jednotlivé kroky důkazu důsledku 2.14.
(7) Koncepty zavedené v definici 2.5 a ve větě 2.16 ilustrujte geometricky v prostorech $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.
(8) Dokažte věty 2.6 a 2.10.

2.1.2 Topologické prostory (T-prostory)

Teorii k topologickým prostorům lze čerpat také ze zdrojů [51, kap. 2, s. 65–76, 86] a [29, část II, kap. 5, s. 105–118].

Definice 2.18.
Topologickým prostorem (T-prostorem) nazýváme strukturu $X := (X, \mathcal{T}_X)$, kde $\mathcal{T}_X \subseteq \exp X$ ($\exp X$ značí množinu všech podmnožin množiny X) je tzv. **topologie na** X s vlastnostmi:
1° $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$,
2° sjednocení libovolného počtu prvků z $\mathcal{T}_X$ je prvkem $\mathcal{T}_X$,
3° průnik konečného počtu prvků z $\mathcal{T}_X$ je prvkem $\mathcal{T}_X$ (viz cvičení 2.34(1)).
Otevřená množina: $U \in \mathcal{T}_X$
Uzavřená množina: $X \setminus U$ (komplement) otevřené množiny $U \in \mathcal{T}_X$
ve 2° a 3° sjednocení a průniky si zamění roli, tedy průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina, sjednocení konečného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.
Otevřené okolí množiny $M \subseteq X$**:** $\mathcal{O}(M) \in \mathcal{T}_X \colon M \subseteq \mathcal{O}(M)$
Otevřené okolí bodu $x \in X$**:** $\mathcal{O}(x) := \mathcal{O}(\{x\})$
Ryzí otevřené okolí bodu $x \in X$**:** $\mathcal{O}^*(x) := \mathcal{O}(x) \setminus \{x\}$
Uzávěr množiny $M \subseteq X$**:** nejmenší uzavřená podmnožina obsahující M neboli $\overline{M} := \bigcap\{V \mid V \text{ je uzavřená} \colon M \subseteq V\}$
Vnitřek množiny $M \subseteq X$**:** největší otevřená množina obsažená v M neboli $\mathrm{Int}(M) := \bigcup\{U \mid U \text{ je otevřená} \colon U \subseteq M\}$
Hranice množiny $M \subseteq X$**:** $\gamma(M) := \overline{M} \setminus \mathrm{Int}(M)$
Všude (nikde) hustá podmnožina $M \subseteq X$**:** $\overline{M} = X$ ($\mathrm{Int}(\overline{M}) = \emptyset$).

Věta 2.19. (důkaz D.1)
(1) U je otevřená $\Leftrightarrow$ $\forall x \in U$ existuje $\mathcal{O}(x) \subseteq U$
(2) $\mathrm{Int}(X \setminus M) = X \setminus \overline{M}$
(3) $\overline{X \setminus M} = X \setminus \mathrm{Int}(M)$
(4) $x \in \overline{M}$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mathcal{O}(x)$ je $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$
(5) $\gamma(M) = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$
(6) $x \in \gamma(M)$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, \mathcal{O}(x)$: $\mathcal{O}(x) \cap M \neq \emptyset$ a $\mathcal{O}(x) \cap (X \setminus M) \neq \emptyset$.

Věta 2.20. (cvičení 2.34(3))
$U \subseteq X$ je otevřená, resp. uzavřená $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Int}(U) = U$, resp. $\overline{U} = U$.

Definice 2.21. T-prostor X se nazývá **separabilní**, jestliže existuje nejvýše spočetná množina $M \subseteq X$ ($|M| \leq \aleph_0$): $\overline{M} = X$.

Definice 2.22.
(**Topologie generovaná systémem podmnožin $\mathcal{S} \subseteq \exp X$, báze**)
Nejmenší topologie na X obsahující prvky $\mathcal{S}$ jako otevřené množiny je průnikem všech takových topologií, a budeme ji značit
$\mathcal{T}(\mathcal{S}) := \bigcap\{\mathcal{T} \mid \mathcal{T} \subseteq \exp X$ je topologie na X: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}\}$.
(Ve cvičení 2.34(4) ověřte, že průnik topologií je skutečně topologie.)
Systém $\mathcal{S}$ se nazývá **bází topologie $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ na** X, jestliže má následující vlastnosti:
(1) $x \in X \Rightarrow$ existuje $B \in \mathcal{S}$: $x \in B$,
(2) $x \in B_1 \cap B_2$ ($B_1, B_2 \in \mathcal{S}$) $\Rightarrow$ existuje $B \in \mathcal{S}$: $x \in B, B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Věta 2.23. (důkaz viz D.2)
Nechť $\mathcal{S} \subseteq \exp X$, pak $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je tvořena právě těmi množinami, které nutně musí obsahovat. Tedy každá otevřená množina z $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je sjednocením konečných průniků množin z $\mathcal{S}$, neboli $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{i\in I} \bigcap_{k \in K_i} U_{ik} \mid U_{ik} \in \mathcal{S},$ pro každé I a $|K_i| < \aleph_0\}$. Tento systém obsahuje $\emptyset$ (sjednocení prázdného systému $I = \emptyset$) i celý prostor X, pokud všechna $K_i = \emptyset$.
Speciálně je-li $\mathcal{S}$ báze, pak $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{S}$ pro každé $I\}$ neboli každá otevřená množina z $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ je nějakým sjednocením množin z $\mathcal{S}$.

Definice 2.24 (**Součinová topologie**).
Na kartézském součinu T-prostorů $X = \prod_{i \in I} X_i$ definujeme součinovou topologii jako topologii generovanou dle vztahu:
$\mathcal{T}_X := \mathcal{T}\{\prod\limits_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_{X_i}, U_i = X_i$ pro skoro všechna i (tj. až na konečně mnoho)$\}$
(zdůvodněte ve cvičení 2.34(5), proč musí platit $U_i = X_i$ pro s. v. i).

Definice 2.25 (**Topologický podprostor $Y \subseteq X$**).
Na Y definujeme tzv. **indukovanou topologii** — viz cvičení 2.34(7):
$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U \mid U \in \mathcal{T}_X\}$.

Příklad 2.26 (**Euklidovská topologie** na $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$).
Zřejmě množina všech otevřených intervalů $\mathfrak{I}$ na $\mathbb{R}$ je báze topologie. Otevřenými množinami v topologii generované touto bází jsou dle 2.23 právě všechna možná sjednocení otevřených intervalů. Podobně bázi příslušné součinové topologie na $\mathbb{R}^n$ tvoří otevřené „kvádry“, neboli všechny kartézské součiny $\mathfrak{I}_1 \times \cdots \times \mathfrak{I}_n$ otevřených intervalů. Takto získaná topologie na $\mathbb{R}$, resp. na $\mathbb{R}^n$ se nazývá **euklidovská**, stejně jako topologie indukovaná na podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ (např. na $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ nebo na $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$).

Definice 2.27 (**Hausdorffův T-prostor**).
T-prostor X se nazývá **Hausdorffův**, jestliže v něm platí následující axiom oddělitelnosti: $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists\, \mathcal{O}(x_1), \mathcal{O}(x_2) \colon \mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset$.

Za jednoduchý příklad T-prostoru, který není Hausdorffův, stačí vzít jakoukoli neprázdnou množinu X s nejmenší topologií $\mathcal{T}_X = \{\emptyset, X\}$.

Definice 2.28. Zobrazení $T \colon X \to Y$ mezi T-prostory se nazývá **spojité v bodě** $x_0 \in X$, jestliže: $\forall\, \mathcal{O}(T(x_0))\, \exists\, \mathcal{O}(x_0) \colon T(\mathcal{O}(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(T(x_0))$. Zobrazení T se nazývá **spojité**, je-li spojité v každém bodě $x \in X$.

Věta 2.29. Nechť $T \colon X \to Y$ (T-prostory). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:
(1) T je spojité,
(2) M je otevřená v $Y \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená v X,
(3) M je uzavřená v $Y \Rightarrow T^{-1}(M)$ je uzavřená v X.

Důkaz.
(1) $\Rightarrow$ (2): Nechť T je spojité (tj. v každém bodě).
a) je-li $T^{-1}(M) = \emptyset \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená dle 1°,
b) nechť $T^{-1}(M) \neq \emptyset$ a $x \in T^{-1}(M) \Rightarrow Tx \in M \Rightarrow M$ je otevřeným okolím bodu $Tx \Rightarrow \exists\, \mathcal{O}(x) \colon T(\mathcal{O}(x)) \subseteq M \Rightarrow \mathcal{O}(x) \subseteq T^{-1}(M) \Rightarrow T^{-1}(M)$ je otevřená dle 2.19(1).

(2) $\Rightarrow$ (1): Nechť $\mathcal{O}(Tx_0)$ je libovolné okolí, položme $M = \mathcal{O}(Tx_0)$, pak dle (2) je $T^{-1}(\mathcal{O}(Tx_0))$ otevřená obsahující x_0, tj. stačí položit $\mathcal{O}(x_0) = T^{-1}(\mathcal{O}(Tx_0))$. Zřejmě $T(\mathcal{O}(x_0)) = \mathcal{O}(Tx_0) = M$.
(3) $\Leftrightarrow$ (2): plyne z $T^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus T^{-1}(M)$ užitím (2), neboť množina je uzavřená právě když její komplement je otevřená množina. □

Definice 2.30. Zobrazení $T \colon X \to Y$ mezi T-prostory se nazývá **otevřené (uzavřené)**, jestliže $T(M)$ je otevřená (uzavřená) množina v Y pro každou otevřenou (uzavřenou) podmnožinu $M \subseteq X$.

Definice 2.31. T se nazývá **homeomorfismus** (**topologický izomorfismus**), jestliže je bijekcí a současně T i T^{-1} jsou spojitá zobrazení. T-prostory X a Y se nazývají **homeomorfní (topologicky izomorfní)**, jestliže existuje homeomorfismus X na Y.

Věta 2.32. (důkaz jako cvičení 2.34(8))
Zobrazení $T \colon X \to Y$ mezi T-prostory je homeomorfismus X na Y právě když T je bijektivní, spojité a otevřené (resp. uzavřené) zobrazení.

Definice 2.33 (**Limita, konvergence v topologii**).
Řekneme, že zobrazení $T \colon X \to Y$ mezi T-prostory **má v bodě** $x_0 \in X$ **limitu** y_0, jestliže $\forall\, \mathcal{O}(y_0)\, \exists\, \mathcal{O}^*(x_0) \colon T(\mathcal{O}^*(x_0)) \subseteq \mathcal{O}(y_0)$; píšeme $Tx \xrightarrow{\mathcal{T}_Y} y_0$ pro $x \xrightarrow{\mathcal{T}_X} x_0$. Analogicky řekneme, že posloupnost $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ při $y_n \in Y$ **konverguje k** $y_0 \in Y$ a píšeme $y_n \xrightarrow{\mathcal{T}_Y} y_0$ pro $n \to \infty$, jestliže $\forall\, \mathcal{O}(y_0)\, \exists\, N \in \mathbb{N} \colon y_n \in \mathcal{O}(y_0)$ pro $n > N$.[4]
Často budeme fakt $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in Y$, zapisovat zkráceně jako $\{y_n\} \subseteq Y$.

[4] Interval $(N, \infty) \cap \mathbb{N}$ hraje roli ryzího okolí nekonečna v indukované euklidovské topologii na $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^*$ (srov. 2.26).

Cvičení 2.34.

(1) V definici 2.18 topologického prostoru zdůvodněte nezbytnost axiomu 3° na vhodném příkladu v euklidovském prostoru dimenze 1.
(2) Dokažte, že podmnožina M T-prostoru X je v něm nikde hustá $\Leftrightarrow$ komplement jejího uzávěru je všude hustý v $\mathcal{T}_X$, tj. $\overline{X \setminus \overline{M}} = X$ (užijte tvrzení 2.19(3)).
(3) Dokažte větu 2.20.
(4) Dokažte, že průnik systému topologií užitý v definici 2.22 je rovněž topologie.
(5) Zdůvodněte proč součinová topologie definovaná v 2.24 nemůže být generována libovolnými kartézskými součiny otevřených množin.
(6) Dokažte, že systém podmnožin generující součinovou topologii na X v definici 2.24 je bází této topologie, a přitom tato topologie je nejmenší, v níž každá projekce X na X_i je spojitá.
(7) V definici 2.25 topologického podprostoru ověřte, že jeho tzv. indukovaná topologie skutečně splňuje axiomy 1° až 3° z definice 2.18.
(8) Dokažte větu 2.32.

2.1.3 Metrické prostory (M-prostory)

Jako další zdroje k tématu metrických prostorů mohou posloužit [32, kap. 1], [51, kap. 2, s. 76–86], [29, část II, kap. 1–3, s. 66–94]. Další podrobnosti lze nalézt v příloze B.

Definice 2.35.
Metrickým prostorem (M-prostorem) nazýváme strukturu $X := (X, d_X)$, kde $d := d_X \colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ je tzv. **metrika na** X s vlastnostmi:

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ\;\; d(x,y) = d(y,x) \\ 2^\circ\;\; d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) \\ 3^\circ\;\; d(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \end{array}\right\} \quad \overset{z=x}{\Longrightarrow} \quad d(x,y) \ge 0.$$

Otevřená koule: $K(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$ o poloměru $r > 0$ se středem x_0, $\mathcal{K} := \{K(x_0, r) \mid x_0 \in X, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$.
Topologie na X**:** $\mathcal{K}$ je báze generující topologii na X: $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(\mathcal{K})$ (viz také cvičení 2.48(1)).

Konvergence dle metriky d**:** $x_n \xrightarrow{d} x := d(x_n, x) \to 0$ pro $n \to \infty$, kde ekvivalence s topologickou definicí konvergence 2.33 je zřejmá (viz cvičení 2.48(2)), tj. stačí psát $x_n \to x$.
Cauchyovská posloupnost: $\{x_n\} \subseteq X \colon d(x_n, x_m) \to 0$ pro $m, n \to \infty$.
Uzavřená koule: $\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \le r\}$ je uzavřená v topologii, ale nemusí být nutně uzávěrem otevřené koule, tj. $\overline{K}(x_0, r) = \overline{K(x_0, r)}$ obecně neplatí (viz cvičení 2.48(6)).
Metrický podprostor (M-podprostor): neprázdná podmnožina $M \subseteq X$ s restrikcí metriky $d_M := d_X|_{M \times M}$; zřejmě současně je M také T-podprostorem v X.

Věta 2.36. Každý M-prostor je Hausdorffův T-prostor.

Důkaz. Dle 2.23 jsou otevřenými množinami právě všechna sjednocení otevřených koulí a $\mathcal{T}_X$ je tedy nejmenší topologie na X, v níž každá koule je otevřená. Zbývá ukázat platnost axiomu oddělitelnosti 2.27: $x \ne y \overset{3^\circ}{\Rightarrow} \rho := d(x, y) > 0$ a pak existují

$\mathcal{O}(x) = K(x, \frac{\rho}{2}), \mathcal{O}(y) = K(y, \frac{\rho}{2})$, jejichž průnik je prázdný, což lze dokázat sporem: $z \in K(x, \frac{\rho}{2}) \cap K(y, \frac{\rho}{2}) \Rightarrow \rho = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$. $\square$

Věta 2.37. $M \subseteq X$ (M-prostor) je uzavřená právě když $x_n \to x, x_n \in M \Rightarrow x \in M$.

Důkaz.
Směr $\Rightarrow$ sporem: Nechť M je uzavřená a předpokládejme, že existuje posloupnost $\{x_n\} \subseteq M, x_n \to x \notin M$. Pak $x \in X \setminus M$ (otevřená) $\overset{2.19(1)}{\Rightarrow} \exists K(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus M$, ale protože z konvergence plyne $\exists N \in \mathbb{N}$: pro $n \geq N$ je $d(x_n, x) < \varepsilon$, pak $x_n \notin M$ pro $n \geq N$, což je spor. Tedy $x \in M$.
Směr $\Leftarrow$ sporem: Kdyby M nebyla uzavřená, pak $X \setminus M$ by nebyla otevřená, tj. $\exists x \in X \setminus M \colon M \cap K(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset \, \forall n \in N$, tedy $\exists x_n \neq x \colon x_n \in M, 0 < d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Pak $x_n \to x \notin M$, spor. $\square$

Poznámka 2.38. Zřejmě $\overline{M}$ dostaneme z M přidáním limit všech konvergentních posloupností $\{x_n\} \subseteq M$, které pak ovšem padnou do $\gamma(M)$, pokud neležely v $\mathrm{Int}(M)$.

Věta 2.39. Každý M-podprostor separabilního M-prostoru je separabilní.

Důkaz. Nechť $M = \{x_1, x_2, \dots\} \subset X$ je nějaká nejvýše spočetná hustá podmnožina separabilního M-prostoru X ($\overline{M} = X$) a $Y \subset X$ jeho M-podprostor. Pak systém koulí $K(x_m, \frac{1}{n})$, $m, n \in \mathbb{N}$, je nejvýše spočetný. Pokud $Y \cap K(x_m, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$, zvolme libovolně, ale pevně prvek $y_{m,n} \in Y \cap K(x_m, \frac{1}{n})$. Množina $\{y_{m,n}\} \subset Y$ takto vybraných prvků je zřejmě rovněž nejvýše spočetná. Ukážeme, že je také hustá v Y.
Pro libovolné $y \in Y$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_m \in M$ takové, že $y \in K(x_m, \frac{1}{2n})$, neboli $y \in Y \cap K(x_m, \frac{1}{2n})$. Rovněž příslušné $y_{m,2n} \in K(x_m, \frac{1}{2n})$ a podle axiomu 2° dostáváme $d(y, y_{m,2n}) \leq d(y, x_m) + d(x_m, y_{m,2n}) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$. $\square$

Definice 2.40. $M \subseteq X$ se nazývá **ohraničená**, jestliže $\exists K \in \mathcal{K} \colon M \subseteq K$ (vzhledem k 2° se stačí omezit na $K := K(x_0, r), x_0$ pevné — viz 2.48(3)).

Věta 2.41. (důkaz jako cvičení 2.48(4))
$x_n \to x$ v X (M-prostor) $\Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovská.

Definice 2.42. M-prostor X se nazývá **úplný**, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta 2.43. Nechť Y je M-podprostor M-prostoru X. Pak platí:
(1) Y úplný $\Rightarrow Y$ uzavřený v X,
(2) X úplný, Y uzavřený $\Rightarrow Y$ úplný.

Důkaz.
(1) $Y \subseteq X$ (M-podprostor). Nechť Y je úplný. Podle 2.37 stačí ukázat, že pro každou posloupnost $Y \ni x_n \to x$ v X je $x \in Y$. Nechť tedy $x_n \to x$, pak dle 2.41 je $\{x_n\}$ cauchyovská v prostoru X a tedy i v prostoru Y, neboť $x_n \in Y$. Pak $x \in Y$, jelikož Y je úplný.
(2) Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská v $Y \Rightarrow \{x_n\}$ je cauchyovská v $X \Rightarrow x_n \to x$ v X, neboť X je úplný $\Rightarrow x \in Y$, neboť Y je uzavřený. $\square$

Věta 2.44 (Heineho definice spojitosti: viz [11, D.16 s. 173])**.**
$T \colon X \to Y$ mezi dvěma M-prostory je spojité v x_0 právě když platí:
$x_n \to x_0$ v $X \Rightarrow T(x_n) \to T(x_0)$ v Y.